

GEORGES DOSTOR

Inclinaisons mutuelles des arêtes opposées du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 452-453

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__452_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INCLINAISONS MUTUELLES DES ARÊTES OPPOSÉES DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Professeur au lycée impérial de la Réunion.

1. Considérons le tétraèdre $SABC$, dans lequel nous poserons les trois arêtes de la base ABC ,

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

et les arêtes latérales opposées,

$$SA = a', \quad SB = b', \quad SC = c'.$$

Représentons par α l'angle des deux arêtes opposées a et a' , par β , γ les angles des arêtes b et b' , c et c' .

Projetons la ligne brisée $BASC$ sur l'arête BC , nous trouvons

$$a = c \cos ABC + a' \cos \alpha + c' \cos SCB,$$

d'où nous tirons

$$2aa' \cos \alpha = a^2 - 2ac \cos ABC + a'^2 - 2ac' \cos SCB.$$

Mais les deux triangles ABC , SBC nous donnent

$$a^2 - 2ac \cos ABC = b^2 - c^2,$$

$$a'^2 - 2ac' \cos SCB = b'^2 - c'^2;$$

nous obtenons donc, en substituant :

$$(1) \quad 2aa' \cos \alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2.$$

On trouverait de même

$$(2) \quad \begin{cases} 2bb' \cos \beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 2cc' \cos \gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \end{cases}$$

2. Ces trois équations donnent

$$(3) \quad aa' \cos \alpha + bb' \cos \beta + cc' \cos \gamma = 1 \rho.$$

3. Représentons par p, q, r les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées; p et q sont les diagonales d'un parallélogramme dont les côtés sont $\frac{c}{2}, \frac{c'}{2}$; il vient, par suite,

$$p^2 + q^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{4} + 2 \cdot \frac{c'^2}{4}.$$

Nous avons donc les relations

$$(4) \quad \begin{cases} 2p^2 + 2q^2 = c^2 + c'^2, \\ 2q^2 + 2r^2 = a^2 + a'^2, \\ 2r^2 + 2p^2 = b^2 + b'^2, \end{cases}$$

qui donnent

$$(5) \quad 4p^2 + 4q^2 + 4r^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2.$$

4. Des égalités (4) on tire les valeurs

$$(6) \quad \begin{cases} 4p^2 = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 4q^2 = c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2, \\ 4r^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2. \end{cases}$$

5. Si nous retranchons chacune de ces équations de la suivante, et la dernière de la première, nous obtenons, en ayant égard à (1) et (2),

$$(7) \quad \begin{cases} aa' \cos \alpha = r^2 - q^2 = (r + q)(r - q), \\ bb' \cos \beta = p^2 - r^2 = (p + r)(p - r), \\ cc' \cos \gamma = q^2 - p^2 = (q + p)(q - p). \end{cases}$$