

A. GENOCCHI

Sur une règle de convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 261-267

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__261_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE RÈGLE DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. A. GENOCCHI.

Une règle assez remarquable pour déterminer la convergence ou divergence des séries peut être déduite très-simplement d'une formule identique due à Nicole (*). On a d'abord

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+v_n} + \frac{b+v_n}{(a+v_n)(a-b)};$$

d'où, en remplaçant successivement v_n par $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, multipliant respectivement par les quantités 1, $\frac{b+v_0}{a+v_0}$, $\frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)}$, etc., et ajoutant les produits, on tire, après des réductions faciles,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a+v_0} + \frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} + \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} + \dots \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)} \\ &+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\dots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\dots(a+v_n)(a-b)}. \end{aligned}$$

Cette formule ne diffère pas de celle de Nicole, qu'on trouve en faisant $v_0 = 0$. Le second membre renferme les $n+1$ premiers termes d'une série avec un terme complémentaire. Désignons par w_n le terme général de la série, par R_n le terme complémentaire, nous aurons

$$\frac{1}{a-b} = w_0 + w_1 + \dots + w_n + R_n, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}};$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1727, p. 257.

de plus,

$$\frac{1}{R_n} = (a - b) \left(1 + \frac{a - b}{b + v_0} \right) \left(1 + \frac{a - b}{b + v_1} \right) \cdots \left(1 + \frac{a - b}{b + v_n} \right).$$

Si les quantités a, b, v_n sont positives, et que a soit $> b$, on aura évidemment

$$\frac{1}{R_n} > (a - b) \left(1 + \frac{a - b}{b + v_0} + \frac{a - b}{b + v_1} + \dots + \frac{a - b}{b + v_n} \right);$$

d'où il s'ensuit que si la série dont le terme général est $\frac{1}{b + v_n}$ est divergente, la valeur de $\frac{1}{R_n}$ augmentera indéfiniment avec n , et par conséquent celle de R_n décroîtra sans cesse et aura pour limite zéro, en sorte que la série Σw_n sera convergente. Soit

$$\frac{1}{b + v_n} = v'_n.$$

D'après un principe connu, une série Σu_n est divergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v'_{n+1}}{v'_n},$$

et convergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v'_{n+1}}{v'_n},$$

pour n quelconque ou à partir d'une valeur donnée de n , les termes u_n étant supposés positifs. Il en résulte la règle suivante :

Une série composée de termes positifs u_n sera convergente s'il existe une autre série à termes positifs $\frac{1}{b + v_n}$ qui soit divergente et telle que, du moins à partir d'une

valeur donnée de n ; on ait constamment

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

a et b étant deux nombres déterminés positifs et $a > b$.

Au contraire, la même série sera divergente si l'on a sous les mêmes conditions

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

Il est visible que la première partie de cet énoncé serait, à plus forte raison, vérifiée si la série $\sum \frac{1}{b + v_n}$ était convergente, et que dans ce cas il suffirait de la condition

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

On peut aussi mettre les inégalités précédentes sous les formes

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n) < -(a - b),$$

$$(b + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (b + v_n) > 0.$$

En remarquant que si la série $\sum \frac{1}{a + v_n}$ est divergente,

la série $\sum \frac{1}{b + v_n}$ le sera à plus forte raison, on peut encore considérer seulement l'expression

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n).$$

La série $\sum \frac{1}{a + v_n}$ étant supposée divergente si cette expression est positive, la série $\sum u_n$ sera aussi divergente;

si cette expression est négative *et toujours inférieure à une quantité déterminée négative*, la série Σu_n sera convergente. Si la série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ était convergente, il suffirait, pour en conclure la convergence de la série Σu_n , que la même expression fût toujours négative. En supposant la série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ divergente, on voit que *la série Σu_n sera convergente ou divergente suivant que l'expression indiquée aura pour n infini une limite négative ou une limite positive.*

Prenons, par exemple, $a + v_n = n$, nous retrouverons la règle connue de M. Duhamel. En faisant successivement

$$a + v_n = n, \quad = nln, \quad = nlnln, \quad = nlnlnln,$$

où la caractéristique l désigne des logarithmes népériens, nous obtiendrons un autre théorème connu (*), d'après lequel une série Σu_n est convergente ou divergente suivant que sera négative ou positive la première des expressions

$$\begin{aligned} & \lim \left[(n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} - n \right], \\ & \lim \left[(n+1) l(n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} - nln \right], \\ & \lim \left[(n+1) l(n+1) ll(n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n} - nlnln \right], \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

qui ne sera pas égale à zéro. On sait, en effet, que dans tous ces exemples la série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ est divergente.

Le théorème que nous venons de rappeler est surtout

(*) CATALAN, *Traité élémentaire des séries*, p. 23, theor. XIV.

utile lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se présente sous l'une des formes

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{h_n}{n}, \\ & 1 - \frac{1}{n} + \frac{k_n}{n!n}, \\ & 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n!n} + \frac{h_n}{n!n!n}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

h_n désignant une fonction de n qui, pour n infini, a une limite finie différente de -1 . Dans les deux premiers cas est comprise la règle de Gauss, qui suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{H}{n^2},$$

h étant une constante et H une fonction de n dont la valeur reste finie.

Le théorème que M. Rouché a donné dans les *Nouvelles Annales* (1866, p. 12) se déduit immédiatement de notre règle. Car, en supposant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n - p - x}{n - p + 1},$$

si la quantité x est positive, on fera

$$a = x, \quad b < x, \quad v_n = n - p - x,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}};$$

si la quantité x est négative ou nulle, on fera

$$b + v_n = n - p,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}};$$

donc la série Σu_n est convergente dans le premier cas, divergente dans le dernier.

La règle de convergence démontrée dans cette Note se rapproche de celle de M. Kummer (*), et, comme celle-ci, elle est applicable à une série quelconque, attendu qu'une série à termes positifs u_n étant donnée, il existe toujours une série auxiliaire $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$, par laquelle l'une ou l'autre des inégalités ci-dessus indiquées sera vérifiée. En effet, si la série Σu_n est divergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{u_n},$$

puisque, en vertu d'un théorème d'Abel, la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ sera aussi divergente, et il viendra

$$b + v_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n}{u_{n+1}},$$

d'où

$$\frac{b + 1 + v_n}{b + v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

Si la série Σu_n est convergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{u_n},$$

d'où

$$b + v_{n+1} = \frac{u_{n+2} + u_{n+3} + \dots}{u_{n+1}}, \quad \frac{b + v_n}{b + 1 + v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XIII.

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

si a est une quantité comprise entre b et $b + 1$.