NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

# Théorie des surfaces polaires d'un plan (fin)

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 5 (1866), p. 97-104

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__97_0>

# THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN (Fin)

(voir p. 49);

PAR M. PAINVIN.

13. THÉORÈME IX. — *La $q^{ième}$ polaire d'un plan $P_0$ relative à la $p^{ième}$ polaire de ce même plan par rapport à la surface primitive est la $(p+q)^{ième}$ polaire de ce plan relative à la surface primitive.*

La $p^{ième}$ polaire du plan $P_0$ relative à la surface primitive est en effet

$$\Delta_p U = \left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^p U = 0;$$

la $q^{ième}$ polaire du même plan par rapport à la surface $\Delta_p U$ est

$$\Delta_q(\Delta_p U) = 0.$$

Or, d'après l'identité (10) du n° 4,

$$\Delta_q(\Delta_p U) = \Delta_{p+q} U = \left(x_0 \frac{d.}{dx} + y_0 \frac{d.}{dy} + z_0 \frac{d.}{dz} + t_0 \frac{d.}{dt}\right)^{p+q} U = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ceci revient à dire que :

*La polaire de $s^{ième}$ classe d'un plan est la même, qu'elle soit prise par rapport à la surface ou par rapport à une polaire quelconque du même plan et de classe supérieure à $s$.*

Car la polaire $p^{ième}$ est de la classe $(n-p)$; la $q^{ième}$ polaire relative à la $p^{ième}$ polaire sera de la classe $(n-p)-q = n-p-q$, ce qui est la classe de la

$(p+q)^{ième}$ polaire relative à la surface primitive. Ainsi un plan a le même point polaire par rapport à la surface et aux $1^{re}$, $2^{e}$, ..., $(n-2)^{ième}$ polaires, etc.

14. Théorème X. — *La polaire $q^{ième}$ d'un plan $P_j$ relative à la $p^{ième}$ polaire d'un plan $P_i$ (cette dernière étant prise par rapport à la surface primitive) coïncide avec la $p^{ième}$ polaire du plan $P_i$ relative à la $q^{ième}$ polaire du plan $P_j$ (cette dernière étant prise par rapport à la surface primitive).*

Cette propriété est la traduction de l'identité (9), n° 4, savoir :

$$\Delta_q^j(\Delta_p^i U) = \Delta_p^i(\Delta_q^j U).$$

15. Théorème XI. — *Si la polaire $q^{ième}$ d'un plan $P_i$ relative à la polaire $p^{ième}$ d'un plan $P_0$ touche un plan $P_1$, la polaire $q^{ième}$ du plan $P_i$ relative à la polaire $(n-p-q)^{ième}$ du plan $P_1$ touchera $P_0$.*

En effet, la $q^{ième}$ polaire de $P_i$ par rapport à la $p^{ième}$ polaire de $P_0$ est

$$\Delta_q^i(\Delta_p^0 U) = 0,$$

ou, d'après l'identité (10), n° 4,

$$(1^{o}) \qquad \Delta_p^0(\Delta_q^i U) = 0.$$

Comme la polaire $\Delta_q^i U$ est de la classe $(n-q)$, il résulte de l'identité (6), n° 2, que l'équation de la polaire (1°) peut s'écrire

$$(2^{o}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_p^0(\Delta_q^i U) &= \Delta_{n-q-p}(\Delta_q^i U)_0 \\ &= \left(x\frac{d.}{dx} + y\frac{d.}{dy} + z\frac{d}{dz} + t\frac{d.}{dt}\right)^{n-p-q}(\Delta_q^i U)_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais la polaire $q^{ième}$ de $P_i$ par rapport à la polaire

$(n-p-q)^{\text{ième}}$ de $P_1$ a pour équation

$$(3^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_q^i\left(\Delta_{n-p-q}^1 U\right) = \Delta_{n-p-q}^1\left(\Delta_q^i U\right)\\ &= \left(x_1 \frac{d.}{dx} + y_1 \frac{d.}{dy} + z_1 \frac{d.}{dz} + t_1 \frac{d.}{dt}\right)^{n-p-q}\left(\Delta_q^i U\right) = 0; \end{aligned}\right.$$

les équations ($3^\circ$) et ($2^\circ$) mettent en évidence le fait annoncé ; car on voit que si la polaire ($2^\circ$) touche le plan $P_1$, on aura précisément la condition pour que la polaire ($3^\circ$) touche le plan $P_0$.

16. Théorème XII. — *Lorsqu'un plan enveloppe une surface de classe $n_1$, son point polaire par rapport à la surface primitive décrit, en général, une surface d'ordre $n_1(n-1)^2$.*

Déterminons le nombre des points en lesquels le lieu cherché est rencontré par une droite quelconque D. Soient V la surface de classe $n_1$, et S et S′ les premières polaires par rapport à la surface primitive U de deux plans P et P′ passant par la droite D. Les points polaires situés sur la droite D seront ceux dont les plans touchent à la fois les surfaces S et S′ (8) ; ces plans doivent en outre, d'après la définition du lieu, toucher la surface V. Donc le nombre des points polaires situés sur la droite D est égal au nombre des plans tangents communs aux trois surfaces V, S et S′, c'est-à-dire à $n_1(n-1)^2$. Donc....

En supposant $n_1 = n$, on retrouve le théorème VII, et en supposant $n_1 = 1$, on conclut de là que *le lieu des points polaires des plans passant par un point fixe est une surface d'ordre $(n-1)^2$.*

17. Théorème XIII. — *L'enveloppe des plans dont les points polaires décrivent une surface d'ordre $m$ est une surface de classe $m(n-1)$, en général.*

Le point polaire d'un plan $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ a pour *équation tangentielle*

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_0 + t\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 0;$$

ses coordonnées tétraédriques (X, Y, Z, T) seront données par les relations (1re partie, n° 7)

$$(1^\circ)\qquad \frac{X}{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0} = \frac{Y}{\left(\frac{dU}{dy}\right)_0} = \frac{Z}{\left(\frac{dU}{dz}\right)_0} = \frac{T}{\left(\frac{dU}{dt}\right)_0}.$$

Si la surface décrite, d'ordre $m$, a pour *équation ponctuelle*

$$(2^\circ)\qquad F(X, Y, Z, T) = 0,$$

l'enveloppe du plan $P_0$ s'obtiendra en éliminant (X, Y, Z, T) entre les équations (1°) et (2°), ce qui donne

$$(3^\circ)\quad F\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)_0, \left(\frac{dU}{dy}\right)_0, \left(\frac{dU}{dz}\right)_0, \left(\frac{dU}{dt}\right)_0\right] = 0.$$

Or cette équation est évidemment du degré $m(n-1)$ par rapport aux coordonnées du plan tangent $(x_0, y_0, z_0, t_0)$; donc...

18. Théorème XIV. — *Le nombre des plans qui ont même point polaire par rapport à deux surfaces de classe $n$ et $n_1$ est égal à*

$$(n + n_1 - 2)[(n-1)^2 + (n_1 - 1)^2].$$

Soient U et V les deux surfaces, et $(U_1, U_2, U_3, U_4)$, $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ les dérivées respectives par rapport à $x, y, z, t$ de U et V, les plans cherchés sont déterminés par les équations

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \frac{U_3}{V_3} = \frac{U_4}{V_4};$$

c'est-à-dire que les coordonnées de ces plans doivent vérifier les *six* équations

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} A_1 = U_1V_2 - U_2V_1 = 0, & A_4 = U_2V_3 - U_3V_2 = 0, \\ A_2 = U_1V_3 - U_3V_1 = 0, & A_5 = U_2V_4 - U_4V_2 = 0, \\ A_3 = U_1V_4 - U_4V_1 = 0, & A_6 = U_3V_4 - U_4V_3 = 0. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, les solutions communes à $A_1$ et $A_2$, lesquelles se composent : I° de celles qui annulent $A_1$ et $A_2$ sans annuler $U_1$ et $V_1$ ; II° de celles qui annulent $U_1$ et $V_1$ à la fois.

Les solutions communes à $A_1$, $A_2$ et $A_6$, par exemple, sont en nombre

$$N = (n + n_1 - 2)^3.$$

Or ces solutions se composent :

1° De celles qui annulent $A_1$, $A_2$ (sans annuler $U_1$ et $V_1$) et $A_6$ [sans annuler ni $(U_4, V_4)$, ni $(U_3, V_3)$] ; elles satisfont à la question, car toutes les équations (1°) sont vérifiées ;

2° De celles qui annulent $A_1$, $A_2$ (sans annuler $U_1$ et $V_1$) et $A_6$ (en annulant $U_4$ et $V_4$ ; elles satisfont encore à la question ;

3° De celles qui annulent $A_1$, $A_2$ (sans annuler $U_1$ et $V_1$) et $A_6$ (en annulant $U_3$ et $V_3$) ; elles ne satisfont pas à la question, car les six équations (1°) ne sont pas vérifiées ; ces dernières solutions étant données par

$$(A_1 = 0,\ U_3 = 0,\ V_3 = 0),$$

leur nombre est

$$(n + n_1 - 2)(n - 1)(n_1 - 1);$$

4° De celles qui annulent $U_1$ et $V_1$ et $A_6$ ; leur nombre est

$$(n + n_1 - 2)(n - 1)(n_1 - 1);$$

elles ne satisfont pas à la question, car il faudrait, pour que les équations (1°) fussent vérifiées, satisfaire à plus de trois relations distinctes, ce qui ne peut pas avoir lieu dans le cas général. Donc le nombre des plans cherchés est, en général,

$$(n+n_1-2)^3-2(n+n_1-2)(n-1)(n_1-1)$$
$$=(n+n_1-2)[(n-1)^2+(n_1-1)^2].$$

Pour le cas de deux surfaces de deuxième classe, ce nombre est égal à 4. En supposant $n_1=1$, on retrouve le théorème V.

19. Soient les quatre surfaces (U, V, R, S) de classes respectives $n, n_1, n_2, n_3$; les points polaires d'un même plan $P_0$ par rapport à ces quatre surfaces seront

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x\left(\dfrac{dU}{dx}\right)_0+y\left(\dfrac{dU}{dy}\right)_0+z\left(\dfrac{dU}{dz}\right)_0+t\left(\dfrac{dU}{dt}\right)_0=0,\\ x\left(\dfrac{dV}{dx}\right)_0+y\left(\dfrac{dV}{dy}\right)_0+z\left(\dfrac{dV}{dz}\right)_0+t\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_0=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si nous exprimons que ces quatre points sont dans un même plan, c'est-à-dire que les équations ci-dessus ont une solution commune en $x, y, z, t$, nous trouvons, en supprimant l'indice 0,

$$(2)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{dU}{dx} & \dfrac{dU}{dy} & \dfrac{dU}{dz} & \dfrac{dU}{dt}\\ \dfrac{dV}{dx} & \dfrac{dV}{dy} & \dfrac{dV}{dz} & \dfrac{dV}{dt}\\ \dfrac{dR}{dx} & \dfrac{dR}{dy} & \dfrac{dR}{dz} & \dfrac{dR}{dt}\\ \dfrac{dS}{dx} & \dfrac{dS}{dy} & \dfrac{dS}{dz} & \dfrac{dS}{dt} \end{vmatrix}=0;$$

donc :

THÉORÈME XV. — *L'enveloppe des plans tels, que leurs* *points polaires, par rapport à quatre surfaces de classes $n$, $n_1$, $n_2$, $n_3$, soient dans un même plan, est une surface de classe $(n + n_1 + n_2 + n_3 - 4)$; et son équation s'obtient en égalant à zéro le déterminant fonctionnel $\Delta$ des premiers membres des équations des surfaces considérées.*

Si dans les équations (1) on remplace $x$, $y$, $z$, $t$ par $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ et inversement, nous retrouvons encore l'équation (2) en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$, c'est-à-dire :

THÉORÈME XVI. — *La surface $\Delta$ est l'enveloppe des plans touchés à la fois par les premières polaires d'un même plan relatives aux quatre surfaces* U, V, R, S.

20. J'appellerai *faisceau de $n^{ième}$ classe* le système de toutes les surfaces de $n^{ième}$ classe assujetties à

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 2\right]$$

conditions communes, et telles, qu'*un plan*, donné arbitrairement, est touché par une seule d'entre elles; et *réseau de $n^{ième}$ classe* le système de toutes les surfaces de $n^{ième}$ classe assujetties à

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 3\right]$$

conditions communes et telles, que *deux plans*, donnés arbitrairement, sont touchés par une seule d'entre elles.

Je ne ferai qu'énoncer les propositions suivantes, car la démonstration est facile.

THÉORÈME XVII. — *Les $p^{ièmes}$ polaires d'un plan fixe par rapport aux surfaces d'un faisceau forment aussi un faisceau; elles sont inscrites dans la développable circonscrite aux $p^{ièmes}$ polaires du même plan par rapport à deux des surfaces du faisceau.*

*Les plans, dont le point polaire est fixe, sont tangents communs à deux surfaces de classe* $2(n-1)$.

THÉORÈME XVIII. — *Les* $p^{\text{ièmes}}$ *polaires d'un plan fixe par rapport aux surfaces d'un réseau forment un réseau; elles sont constamment tangentes aux* $(n-p)^3$ *plans tangents communs aux* $p^{\text{ièmes}}$ *polaires du même plan par rapport à trois des surfaces du réseau.*

*Les plans dont le point polaire est fixe enveloppent une surface de la classe* $3(n-1)$.

**21.** La démonstration, l'énumération même des propriétés auxquelles conduit la théorie actuelle serait fort longue et donnerait une trop grande étendue à ce Mémoire. Je ne désirais qu'ajouter une nouvelle preuve à cette proposition, déjà mise en évidence par M. Plücker, que l'analyse peut aussi traduire, expliquer et démontrer la dualité géométrique. Les définitions et les principes généraux que je viens de poser nous montrent que toute propriété des polaires d'un point ou dérivant de la théorie des polaires a nécessairement sa corrélative dans la théorie des polaires d'un plan; et qu'un seul calcul, interprété à ce double point de vue, démontre à la fois la double proposition.

Il me reste néanmoins à ajouter quelques mots sur les singularités des surfaces, afin de bien préciser l'interprétation des calculs dans le cas des équations tangentielles; ce sera l'objet d'un second paragraphe.