Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 95-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__95_1>

QUESTIONS.

752. On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle, que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe.

Lieu du pied de la quatrième normale. (DARBOUX.)

753. Si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné, on trouve une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2 = Ax^2 + By^2 + C.$$

Réciproquement, étant donnée une équation de cette forme, peut-on trouver une ellipse ou une hyperbole telles, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole, ces tangentes fassent un angle donné? Le problème a-t-il plusieurs solutions?

(G. DARBOUX.)

754. Soient α, β, γ les milieux des côtés d'un triangle ABC; P le point de rencontre des hauteurs AD, BE, CF; O le centre du cercle circonscrit, dont le rayon $=$ R.

Sur les segments PA, PB, PC; Pα, Pβ, Pγ, on prend les points p, q, r; p', q', r', de telle sorte que

$$Pp = \frac{1}{n}\cdot PA, \quad Pq = \frac{1}{n}\cdot PB, \quad Pr = \frac{1}{n}\cdot PC,$$

$$Pp' = \frac{2}{n}\cdot P\alpha, \quad Pq' = \frac{2}{n}\cdot P\beta, \quad Pr' = \frac{2}{n}\cdot P\gamma;$$

et enfin on désigne par p'', q'', r'' les pieds des perpendiculaires abaissées des points p', q', r' sur les hauteurs AD, BE, CF, respectivement. Démontrer que p, q, r; p', q', r'; p'', q'', r'' sont neuf points sur la même circonférence, dont le rayon $= \frac{1}{n}\cdot R$, et dont le centre est un point M situé sur la ligne PO, de telle sorte que

$$PM = \frac{1}{n}\cdot PO \quad (*).$$

Si on cherche la condition que la circonférence dont il s'agit touche la circonférence inscrite, on aura

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} = 1 + \frac{r^2}{\rho^2},$$

r étant le rayon du cercle inscrit et ρ le rayon du cercle conjugué au triangle. (Griffiths.)

(*) Si l'on pose $n = 2$, on a un théorème bien connu.