NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques des racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 76-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__76_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉTHODE DE CAUCHY POUR LE CALCUL DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES DES ÉQUATIONS (*).

177. Cauchy a publié, dans ses anciens *Exercices de Mathématiques* (4e année, p. 103), une méthode nouvelle et fort élégante pour obtenir la valeur d'une fonc-

(*) Extrait du *Cours d'Algèbre supérieure* par M. J.-A. Serret, membre de l'Institut, etc.; 3e édition, 1866, t. I, p. 391. L'ouvrage aura deux volumes. Aussitôt que le second aura paru, nous rendrons compte de cette troisième édition qui se distingue des deux précédentes par d'importantes améliorations. P.

tion symétrique et entière des racines d'une équation. Cette méthode consiste à éliminer successivement de l'expression de la fonction symétrique qu'on veut évaluer chacune des racines de l'équation proposée; elle repose sur la proposition suivante :

Soit V une fonction symétrique et entière des racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$ d'une équation

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

que nous représenterons aussi, pour abréger, par

$$X = 0;$$

et supposons qu'ayant éliminé de l'expression de V, par un moyen quelconque, toutes les racines excepté a, on ait mis la valeur de cette fonction sous la forme d'un polynôme entier et rationnel ordonné par rapport aux puissances de a, que l'on ait, par exemple,

$$V = A_0 a^{\mu} + A_1 a^{\mu - 1} + \ldots + A_{\mu - 1} a + A_{\mu},$$

A_0, A_1, etc., étant des quantités composées rationnellement avec les coefficients de l'équation proposée, je dis que si l'on divise cette expression de V par le polynôme

$$A = a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1} a + p_m,$$

obtenu en remplaçant x par a dans X, le reste de la division ne contiendra pas a, et sera précisément la valeur de la fonction V.

En effet, si Q et R désignent le quotient et le reste de la division de V par A, on aura $V = AQ + R$, et comme A est nul,

$$V = R.$$

D'ailleurs, ce reste R est au plus du degré $m - 1$ en a;

nous le représenterons par

$$q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1},$$

et l'on aura

$$V = q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} + \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

Mais V étant une fonction symétrique, on peut changer les lettres a et b l'une en l'autre, ainsi que a et c, etc.; et comme, par ces changements, q_0, q_1, etc., conservent leurs valeurs, il s'ensuit que l'équation

$$q_0 x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + \ldots + q_{m-2} x + (q_{m-1} - V) = 0$$

sera satisfaite en remplaçant x par l'une quelconque des m racines a, b, ..., k, l; ce qui est impossible, à moins que les coefficients ne soient tous nuls, car cette équation n'est que du degré $m-1$; on aura donc, en particulier,

$$q_{m-1} - V = 0$$

ou

$$V = q_{m-1},$$

comme nous l'avions annoncé.

La démonstration précédente suppose que les m racines a, b, c, ..., k, l sont inégales; mais les conclusions précédentes ne subsistent pas moins, si quelques-unes de ces racines sont égales entre elles. Nous emploierons, pour justifier cette assertion, un raisonnement dont on fait un fréquent usage en analyse.

Si l'équation $X = 0$ a des racines égales, on considérera d'abord à sa place une équation $X_1 = 0$, dont toutes les racines seront inégales, et qu'on obtiendra en faisant subir des modifications insensibles aux coefficients de X; par exemple, si l'équation $X = 0$ a trois racines égales à

a, et que les autres racines soient différentes, on prendra

$$X_1 = \frac{X(x-a-h)(x-a-h')}{(x-a)^2}.$$

Le polynôme X_1 ne diffère de X qu'en ce que deux des trois racines égales à a sont remplacées par $a+h$ et $a+h'$: on voit aisément, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, comment on devrait choisir le polynôme X_1, si, outre les trois racines égales à a, l'équation proposée avait plusieurs racines égales à b, à c, etc. Cela posé, substituant l'équation $X_1 = 0$ à $X = 0$, et conservant d'ailleurs les notations précédentes, on arrivera à l'équation

$$V = q_{m-1},$$

et cette équation aura lieu, quelque petites que soient les quantités h, h', etc.; elle aura donc lieu aussi à la limite, quand on fera $h = 0$, $h' = 0$, etc.

178. Voici maintenant la méthode donnée par Cauchy pour calculer la valeur d'une fonction symétrique et entière V des racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$ de l'équation

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

Divisons X par $x-a$, et désignons par X_1 le quotient; divisons de même X_1 par $x-b$, et désignons par X_2 le quotient, puis X_2 par $x-c$, et soit X_3 le quotient, et continuons ainsi d'enlever de X tous les facteurs linéaires jusqu'à $x-k$ inclusivement, en sorte que X_{m-1} ne contiendra plus que le seul facteur $x-l$. Cela posé, considérons les m équations

$$X = 0,\quad X_1 = 0,\quad X_2 = 0, \ldots,\quad X_{m-1} = 0.$$

La première n'est autre que la proposée, et elle a pour racines $a, b, c, \ldots, k, l$; la seconde a pour racines $b, c, \ldots,$

k, l, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière en fonction de a et des coefficients de la proposée; la troisième a pour racines $c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière en fonction de b et des coefficients de la précédente, c'est-à-dire en fonction de a, b et des coefficients de la proposée; et, en général, les coefficients de l'une quelconque de ces équations sont exprimés sous forme entière en fonction des coefficients de la proposée et des racines qui n'appartiennent pas à l'équation que l'on considère. Désignons enfin par A la valeur de X pour $x = a$, par B la valeur de X_1 pour $x = b$, par C celle de X_2 pour $x = c$, et ainsi de suite, en sorte que I sera la valeur de X_{m-3} pour $x = i$, K celle de X_{m-2} pour $x = k$, et L celle de X_{m-1} pour $x = l$; on aura

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots, \quad I = 0, \quad K = 0, \quad L = 0.$$

Cela posé, V est une fonction symétrique, non-seulement des racines de l'équation $X = 0$, mais aussi des racines de l'une quelconque des équations

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \ldots, \quad X_{m-3} = 0, \quad X_{m-2} = 0, \quad X_{m-1} = 0.$$

Nous allons faire voir comment, en s'appuyant sur cette remarque, on peut, à l'aide du théorème fondamental démontré plus haut, éliminer successivement chaque racine de l'expression de V.

D'abord l'équation $L = 0$, où l entre au premier degré, permet de chasser immédiatement l de l'expression de V. Considérant alors V comme fonction symétrique des deux racines k et l de l'équation $X_{m-2} = 0$, dont l'une l est déjà éliminée, on l'ordonnera par rapport à k, et on la divisera par K, conformément à ce qui a été dit plus haut; le reste de la division ne contiendra pas k et sera la valeur de V débarrassée des racines k et l. On considérera alors V comme fonction symétrique des trois racines i, k, l

de l'équation $X_{m-3} = 0$, dont les deux dernières n'entrent plus dans son expression, et l'ayant ordonnée par rapport à i, on la divisera par I à l'effet d'éliminer i; le reste de la division ne contiendra pas i et sera la valeur de V débarrassée des trois racines i, k, l. On continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait éliminé de chacune des racines a, b, $c, \ldots$, i, k, l; on aura alors la valeur de cette fonction exprimée par les coefficients de l'équation proposée.

Il importe de remarquer que l'expression définitive de V s'obtient par de simples divisions, et que les premiers termes des polynômes A, B, C,..., I, K, L, qui servent successivement de diviseurs, ont tous l'unité pour coefficient : par conséquent, ces divisions n'introduiront aucun dénominateur; en sorte que si l'expression primitive de V est entière, non-seulement par rapport aux racines a, b, $c, \ldots$, i, k, l, qui y entrent symétriquement, mais encore par rapport aux coefficients p_1, p_2, etc., qui peuvent eux-mêmes y figurer, l'expression définitive de V sera aussi entière par rapport à ces coefficients; enfin, si ces mêmes coefficients sont des nombres entiers, V sera pareillement un nombre entier. Ce résultat important, que nous n'avions pas établi complétement par notre première méthode, mais qui résulte immédiatement de la méthode de Waring, se déduit aussi, comme on voit, de la méthode de Cauchy.

Application de la méthode de Cauchy à un exemple.

179. Nous allons appliquer la méthode de Cauchy à la détermination du produit des carrés de toutes les différences des racines d'une équation donnée, prises deux à deux. Cet exemple suffira pour montrer comment on peut, par des artifices convenables, simplifier dans certains cas l'emploi de la méthode.

Soient toujours a, b, c,..., k, l les m racines de l'équation

(1) $\quad X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0;$

soient aussi

$$V = (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (k-l)^2$$

et

$$V_1 = (b-c)^2 (b-d)^2 \ldots (k-l)^2;$$

V sera le produit des carrés des différences des racines de l'équation (1), prises deux à deux, et V_1 le produit des carrés des différences des racines de l'équation

$$\frac{X}{x-a} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{r} x^{m-1} + p_1 \\ + a \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^{m-2} + p_2 \\ + p_1 a \\ + a^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{m-3} + \ldots + p_{m-1} = 0, \\ \qquad\quad + p_{m-2} a \\ \qquad\quad + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad + a^{m-1}. \end{array}$$

Cela posé, on a

$$V = V_1 (a-b)^2 (a-c)^2 \ldots (a-k)^2 (a-l)^2.$$

Mais le produit $(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-l)$ est égal (n° 49) à la valeur que prend la dérivée du polynôme X pour $x = a$, c'est-à-dire égal à

$$ma^{m-1} + (m-1) p_1 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1};$$

donc on aura

$$V = V_1 [ma^{m-1} + (m-1) p_1 a^{m-2} + \ldots + p_{m-1}]^2.$$

D'après cela, si nous admettons qu'on sache former la valeur de la fonction V pour une équation du degré $m-1$, on pourra également trouver la valeur de cette fonction pour une équation du degré m. Effectivement, par hypothèse, on sait exprimer la valeur de V_1 par les coefficients de l'équation (2), c'est-à-dire en fonction de a et des coefficients de la proposée; donc la fonction V pourra elle-même être mise sous la forme d'un polynôme ordonné par rapport aux puissances de a, et, en divisant ce polynôme par le premier membre de l'équation proposée, dans lequel on aura remplacé x par a, le reste de la division donnera la valeur cherchée de V. Or on sait calculer la fonction de V pour une équation du deuxième degré; on pourra donc calculer cette fonction pour l'équation du troisième degré, puis pour celle du quatrième, et ainsi de suite.

Cas de l'équation du troisième degré. — L'équation proposée est

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} V \quad & (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2, \\ V_1 &= (b-c)^2, \\ V &= V_1(a-b)^2(a-c)^2; \end{aligned}$$

V_1 étant relatif à l'équation du deuxième degré

$$\begin{array}{r|l} x^2 + p & x + q = 0. \\ + a & \;+ pa \\ & \;+ a^2 \end{array}$$

On a immédiatement

$$V_1 = (p+a)^2 - 4(q + pa + a^2) = -3a^2 - 2pa + (p^2 - 4q);$$

d'ailleurs

$$(a-b)(a-c) = 3a^2 + 2pa + q,$$

par suite,

$$\begin{aligned} V &= (-3a^2 - 2pa + p^2 - 4q)(3a^2 + 2pa + q)^2 \\ &= -27a^6 - 54pa^5 \begin{array}{l|l|l|l|l} -27p^2 & a^4 + 4p^3 & a^3 + 4p^4 & a^2 + 4p^3q & a + p^2q^2 \\ -54q & \;-72pq & \;-18p^2q & \;-18pq^2 & \;-4q^3 \\ & & \;-27q^2 & & \end{array} \end{aligned}$$

Divisant cette valeur de V par $a^3 + pa^2 + qa + r$, on trouve pour quotient

$$-27a^3 - 27pa^2 - 27qa + (4p^3 + 27r - 18pq),$$

et pour reste,

$$-4q^3 - 27r^2 + 18pqr + p^2q^2 - 4p^3r,$$

ce qui est précisément la valeur de V que nous cherchons. On trouvera dans le Chapitre suivant une méthode plus expéditive pour résoudre la même question.