

GEORGES DOSTOR

**Expressions générales du rayon et de la surface des polygones circonscriptibles**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1866), p. 73-76

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1866\\_2\\_5\\_73\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_73_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## EXPRESSIONS GÉNÉRALES DU RAYON ET DE LA SURFACE DES POLYONES CIRCONSCRIPTIBLES ;

PAR M. GEORGES DOSTOR ,  
Docteur ès Sciences mathématiques,  
Professeur au lycée impérial de l'île de la Réunion.

---

1. La question que nous nous proposons de résoudre est la suivante :

*Un polygone de  $n$  côtés est circonscrit à un cercle ; on connaît les tangentes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$  menées des différents sommets du polygone à la circonférence : calculer, en valeur de ces tangentes, le rayon du cercle et la surface du polygone.*

2. Désignons par  $2A, 2B, 2C, \dots$  les angles du polygone respectivement compris sous les tangentes  $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), \dots$ , nous avons l'égalité

$$A + B + C + \dots = (n - 2) \frac{\pi}{2}.$$

On sait que si  $n$  est pair,

$$\cot(A + B + C + \dots) = \pm \frac{1 - c_2 + c_4 - \dots}{c_1 - c_3 + c_5 - \dots},$$

et si  $n$  est impair,

$$\cot(A + B + C + \dots) = \pm \frac{c_1 - c_3 + c_5 - \dots}{1 - c_2 + c_4 - \dots},$$

où  $c_1$  désigne la somme des cotangentes,  $c_2$  la somme des

produits de ces cotangentes deux à deux, et ainsi de suite.

Or, lorsque  $n$  est pair,  $(n - 2) \frac{\pi}{2}$  exprime un nombre pair d'angles droits, et l'on a

$$\cot (A + B + C + \dots) = \infty ,$$

ce qui exige que

$$c_1 - c_3 + c_5 - \dots = 0 ;$$

et lorsque  $n$  est impair,  $(n - 2) \frac{\pi}{2}$  représente un nombre impair d'angles droits, et il vient

$$\cot (A + B + C + \dots) = 0 ,$$

ce qui donne la même relation. *On a donc, pour les angles d'un polygone fermé quelconque, convexe, à angles rentrants ou étoilé, la formule générale*

$$(I) \quad c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \dots = 0 .$$

3. *Rayon du cercle inscrit.* — Représentons ce rayon par  $R$ ; nous avons

$$\cot A = \frac{\alpha}{R}, \quad \cot B = \frac{\beta}{R}, \quad \cot C = \frac{\gamma}{R}, \dots$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (I), nous aurons l'équation

$$\frac{S_1}{R} - \frac{S_3}{R^3} + \frac{S_5}{R^5} - \frac{S_7}{R^7} + \dots = 0 ,$$

où nous désignons par  $S_1$  la somme des quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ ; par  $S_3$  la somme de leurs produits trois à trois, etc.

Deux cas sont à considérer ici :

1° Si  $n$  est impair, le dernier terme sera  $\frac{S_n}{R^n}$ , et l'équa-

tion pourra s'écrire

$$(II) \quad S_1 R^{n-1} - S_3 R^{n-3} + S_5 R^{n-5} - \dots = 0.$$

2° Si  $n$  est pair, le dernier terme sera  $\frac{S_{n-1}}{R^{n-1}}$  et l'équation se réduira à

$$(III) \quad S_1 R^{n-2} - S_3 R^{n-4} + S_5 R^{n-6} - \dots = 0.$$

Telles sont les deux premières relations que nous nous proposons d'établir.

4. REMARQUE. — Lorsqu'on permute entre eux les segments tangentiels  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ , les coefficients  $S_1, S_3, S_5, \dots$  ne changent pas; les équations (II) et (III) donnent donc toujours les mêmes valeurs pour  $R$ . Donc :

*Lorsqu'un polygone est circonscriptible à un cercle, quel que soit l'ordre dans lequel on dispose la suite des segments tangentiels des côtés, le nouveau polygone sera encore circonscriptible au même cercle.*

5. APPLICATIONS. — 1° Triangle :

$$(1) \quad R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

2° Quadrilatère :

$$(2) \quad R^2 = \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

6. Surface du polygone. — En appelant  $Q$  l'aire du polygone circonscriptible, nous avons

$$Q = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots) R = S_1 R,$$

d'où

$$R = \frac{Q}{S_1}.$$

Substituons cette valeur dans les deux équations (II) et (III) et effectuons : nous obtenons les nouvelles équations

$$(IV) \quad Q^{n-1} - S_1 S_3 Q^{n-3} + S_1^2 S_5 Q^{n-5} - \dots = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

$$(V) \quad Q^{n-2} - S_1 S_3 Q^{n-4} + S_1^2 S_5 Q^{n-6} - \dots = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

qui donnent l'aire du polygone en fonction des quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ .

7. REMARQUE. — *L'aire est constante, quel que soit l'ordre de succession des segments tangentiels  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ .*

8. APPLICATIONS. — 1° Triangle :

$$(5) \quad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma) \alpha \beta \gamma}.$$

2° Quadrilatère :

$$(6) \quad Q = \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma + \delta) (\alpha \beta \gamma + \alpha \beta \delta + \alpha \gamma \delta + \beta \gamma \delta)}.$$