NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

De la projection gauche

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 63-70

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__63_0>

DE LA PROJECTION GAUCHE (suite)

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 385);

PAR M. ABEL TRANSON.

XI. *Objet de ce second article.* — On a vu que, par la projection gauche, toute ligne de l'ordre n est transformée en une ligne de l'ordre $2n$; à moins que la ligne primitive ne passe par certains points, circonstance qui en réduisant l'ordre à n'être plus que l'un des nombres $2n-1$, $2n-2$, $2n-3$,..., permet d'obtenir des transformées d'ordre impair aussi bien que d'ordre pair. J'ajoute que toute ligne, après sa transformation, passe par trois points particuliers du tableau, lesquels trois points sont pour chacune des transformées des points multiples de l'ordre n, si n marque l'ordre de la ligne primitive.

Ces propriétés, qu'on pourrait croire caractéristiques de la projection gauche, lui sont communes avec la transformation par rayons vecteurs réciproques telle qu'elle a été récemment généralisée par M. Hirst (*). D'après cela, et probablement aussi à cause de la très-grande diversité de conditions que comporte cette nouvelle méthode, comparativement à la détermination unique des conditions de la projection gauche, plusieurs personnes ont présumé que les résultats de M. Hirst devaient comprendre, comme des cas particuliers, ceux que j'ai présentés dans un précédent article. Je me propose de mon-

(*) *On the quadric inversion of plane curves*, by T.-A. HIRST, F. R. S.; from the *Proceedings of the Royal Society*, Marsh 2, 1865.

trer ici qu'une telle opinion serait inexacte. Je rendrai raison de ce que les deux méthodes ont en commun certaines propriétés, et cependant je ferai voir qu'elles ne sont pas réductibles l'une à l'autre. Je ne crains pas d'entrer dans cette discussion, parce que le lecteur y trouvera au moins l'avantage de connaître les principes de l'intéressante méthode due à M. Hirst.

XII. Théorème. — *Si, après avoir construit une projection gauche, on fait tourner le plan du tableau autour de son intersection avec le plan primitif, les deux figures ne cessent pas d'être les projections l'une de l'autre* (*).

Cette propriété, qui, comme on sait, appartient aussi à la projection centrale ou perspective, nous permettra de rabattre le plan du tableau sur le plan primitif, ou mieux encore, de faire la *transformation gauche* d'une figure plane dans son plan; ce qui, en supprimant toute considération des trois dimensions de l'espace, facilitera la comparaison de cette sorte de transformation avec la méthode des rayons vecteurs réciproques.

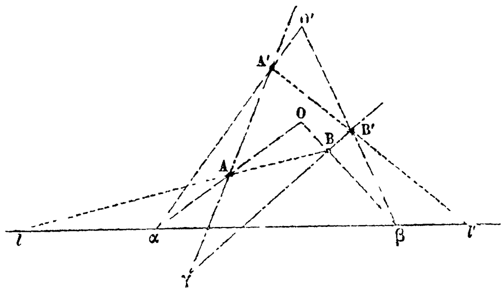
XIII. *Transformation gauche dans le plan.* — Soient A et B les pieds des directrices dans le plan primitif; A' et B' leurs pieds sur le tableau, celui-ci étant supposé rabattu sur le premier par une rotation autour de l'intersection commune *ll'*.

On verra aisément que pour obtenir le point O' correspondant ou transformé du point O, il faut joindre ce dernier aux points A et B; prolonger les lignes OA, OB

(*) Je laisse aux jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales* le soin de démontrer ce théorème, et aussi la correspondance des points du plan primitif et du tableau indiqué au n° XIII.

jusqu'à leurs rencontres α et β avec ll', puis pousser $\alpha A'$ et $\beta B'$ jusqu'à leur rencontre qui sera le point O'.

FIG. 1.



On peut appeler ll' l'*axe de transformation*; A, B, l' seront les *trois points principaux* de la figure primitive; et, comme il y a une réciprocité parfaite entre les deux figures, A', B' et l seront les *trois points principaux* de la seconde.

Les plus simples principes de la *Géométrie supérieure* donneront les propriétés de cette transformation plane.

Supposant, par exemple, que O décrive une ligne droite, le lieu de O' est une conique comme étant déterminé par les rencontres des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour centres A' et B'.

De là, et par un raisonnement employé dans le premier article, cette conséquence, que toute courbe se transforme en une autre dont l'ordre est double.

A un point déterminé de l'une des figures correspond généralement un point unique de l'autre figure; mais il y a exception pour les points des droites qui joignent deux à deux les points principaux. C'est ainsi que :

1° A un point quelconque de AB correspond un seul point, le point l du tableau;

2° A un point quelconque de Al' correspond le seul point B';

3° A un point quelconque de Bl' correspond le seul point A'.

On peut dire aussi qu'au seul point A correspondent indifféremment tous les points de lB'; au point B tous ceux de lA'; au point l' tous ceux de $A'B'$, et ceci peut se voir directement ou bien être conclu, par voie de réciprocité, des trois remarques précédentes.

D'ailleurs, de ces remarques et du fait qu'une droite quelconque de la figure primitive rencontre nécessairement AB, Al' et Bl', il s'ensuit que la conique dans laquelle cette droite se transforme passe nécessairement par les trois points l, B' et A'; ce qui motive suffisamment leur dénomination de *points principaux* du tableau.

Et plus généralement, comme une courbe l'ordre n, tracée sur le plan primitif, a n rencontres avec les mêmes trois droites AB, Al', Bl', il est manifeste que sa transformée aura un point multiple de l'ordre n en chacun des mêmes points l, B' et A'.

XIV. *Transformation par rayons vecteurs réciproques* (méthode de M. Hirst). — Au lieu de considérer, comme à l'ordinaire, un cercle (de rayon OR) et de prendre sur chaque droite issue du centre deux points conjugués a et a', dont les distances à ce même centre constituent les deux *rayons réciproques* et sont liées par la relation

$$Oa.Oa' = \overline{OR}^2,$$

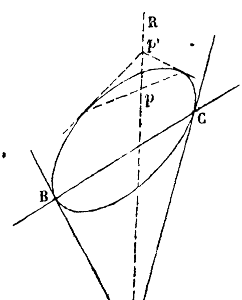
M. Hirst prend pour courbe fondamentale, non plus un cercle, mais une conique quelconque; il donne pour origine aux rayons, non pas le centre de cette conique, mais un point quelconque A de son plan; puis, sur chaque droite AR issue de ce point, il appelle *conjugués* deux points p et p' tels, que l'un d'eux appartienne à la polaire de l'autre, condition qui entraîne entre ces deux points une parfaite réciprocité.

La position du point A qui peut être intérieur ou extérieur à la conique ou placé sur son périmètre; le choix même de la conique, qui peut être soit l'une des trois courbes générales, soit quelqu'une de leurs variétés, comme cercle, hyperbole équilatère, couple de droites réelles ou imaginaires...; ces circonstances très-diverses offrent à l'auteur, indépendamment des lois propres à la transformation généralisée, une foule de résultats très-dignes d'intérêt.

Sans entrer dans ce détail, je me bornerai à signaler les propriétés principales qui rapprochent la transformation gauche de la nouvelle méthode des rayons réciproques et quelques-unes de celles qui l'en distinguent essentiellement.

A cet effet, je prends pour exemple de la méthode de M. Hirst le cas où le point A, origine commune des rayons réciproques, est à l'extérieur de la conique.

Fig. 2.



Ayant mené du point A les deux tangentes AB, AC et la corde de contact BC, on verra, d'après la définition des points conjugués, que si un point quelconque du plan se transforme en un point unique, il y a cependant exception :

1° Pour tous les points de la corde de contact, lesquels ont pour leur conjugué commun le point A;

2° Pour tous les points de AB qui ont leur conjugué en B;

3° Pour tous ceux de AC qui ont leur conjugué en C.

D'ailleurs deux points conjugués p et p' sont toujours, par définition, sur une même ligne (comme AR) issue du point A.

D'après cela, l'ordre d'une courbe transformée se déduit aisément de l'ordre de la courbe primitive. Celle-ci, par exemple, étant de l'ordre n, rencontre toute droite comme AR en n points p qui donnent lieu sur cette même ligne à n points p' de la transformée; mais de plus, la courbe primitive rencontre aussi la corde de contact en n points qui donnent lieu pour la transformée à un point multiple de l'ordre n en A. Ainsi, la transformée a $2n$ rencontres avec toute ligne issue du point A; donc elle est de l'ordre $2n$, et on verra aisément que les points B et C lui sont, comme A, des points multiples dont la multiplicité est d'ordre n.

J'omets les exceptions qui peuvent résulter du passage de la courbe primitive par l'un de ces trois points. Il suffit de dire qu'ils sont analogues aux trois points principaux du tableau de la projection gauche (*).

Mais outre que la réciprocité ne fait pas naître ici des points principaux qui soient particuliers à la figure primitive, j'observerai que dans la méthode des rayons réci-

(*) On remarquera que, si le point A est intérieur à la conique, les deux points B et C sont imaginaires.

proques (simple ou généralisée), les points de la conique fondamentale sont à eux-mêmes leurs conjugués, et possèdent cette propriété à l'exclusion de tous les autres points de la figure. Dans la transformation gauche, les points de l'axe de transformation sont à eux-mêmes leurs conjugués, et, hors de cette ligne, il y a un point, un seul point, doué de la même propriété : c'est le point de rencontre de AA′ avec BB′.

C'est ici une différence essentielle; car la conique fondamentale de l'autre méthode ne saurait donner lieu parmi ses variétés à cet ensemble : *une droite et un point.*

D'ailleurs, les points conjugués p et p' de la *fig.* 2 sont toujours en collinéation avec un même point A. Or, on trouve bien dans la transformation gauche (*fig.* 1) que le conjugué d'un point de AA′ est sur cette même ligne AA′, et que le conjugué d'un point de BB′ est aussi sur BB′. Il faudrait donc, pour pouvoir affirmer la coïncidence des deux méthodes, que les points conjugués O et O′ fussent en collinéation avec le point γ, rencontre de AA′ et BB′. Ainsi, les deux triangles AOB, A′O′B′, auraient leurs sommets de même nom en collinéation avec un même point; mais alors il faudrait, d'après un théorème bien connu, que les points l et l' fussent confondus en un seul, c'est-à-dire que les deux côtés homologues AB et A′B′ se rencontrasssent sur la droite $\alpha\beta$ qui joint les rencontres (AO, A′O′) et (BO, B′O′). Or cela n'est pas admissible, vu l'indépendance essentielle des quatre points A, A′, B, B′, relativement à la droite ll'.

XV. *Explication de l'analogie des deux méthodes.*— Après avoir établi surabondamment que les deux modes de transformation sont bien distincts, je dirai que leur propriété commune, de doubler l'ordre des courbes transformées avec apparition constante de trois points multiples, tient manifestement à ce que telle est la loi générale des transformations où un point correspond à un point unique, et réciproquement.

C'est ce que M. Magnus a démontré à l'aide des formules générales que j'ai rapportées précédemment. J'ajoute que par ces mêmes formules on trouvera sans difficulté que, généralement, il y a dans ces sortes de transformation quatre points qui sont à eux-mêmes leurs propres transformés, mais que, sous des conditions particulières qui sont inconciliables entre elles, ces points peuvent être en nombre infini :

1° Sur *une conique quelconque*, ce qui correspond à la méthode de M. Hirst;

2° Sur *une droite accompagnée d'un point*, ce qui correspond à la transformation gauche.

Nota. — On vient de voir, en réalisant la *transformation gauche* dans le plan de la figure primitive, qu'il n'existe, en dehors de l'axe de transformation, qu'un seul point qui soit à lui-même son transformé. Ce résultat, qui s'explique par les formules générales de M. Magnus, et qui est décisif pour l'objet du présent article, se voit très-facilement par la *projection gauche* elle-même. En effet, si le point O', projection du point O, est tel, qu'après le rabattement du tableau sur le plan primitif ces deux points coïncident, il est manifeste que la ligne OO' doit être perpendiculaire au plan qui partage en deux également l'angle dièdre du plan primitif et du tableau. Cependant cette même ligne rencontre à la fois les deux directrices; elle est donc l'intersection des deux plans qui projettent orthogonalement ces mêmes directrices sur ce plan bissecteur. Or la détermination d'une telle ligne est unique. Donc, etc.