H. FAURE

Interprétation géométrique des coefficients des variables dans les équations des courbes et des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 5-10

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

des coefficients des variables dans les équations des courbes et des surfaces du second ordre (*);

PAR M. H. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

I. Considérons la conique

$$A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + A_{33}\gamma^2 + 2A_{12}\alpha\beta + 2A_{13}\alpha\gamma + 2A_{23}\beta\gamma = 0$$

rapportée au triangle de référence ABC. Si l'on désigne par c_1, c_2 les points d'intersection de la conique avec le côté AB, les droites cc_1, cc_2 seront données par l'équation

$$A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 + 2A_{12}\alpha\beta = 0,$$

de sorte que si $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ sont les deux racines de cette équation, on a, en désignant par a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC,

$$\frac{\alpha_1 . \alpha_2}{\beta_1 . \beta_2} = \frac{A_{22}}{A_{11}} = \frac{Bc_1 . Bc_2}{Ac_1 . Ac_2} \cdot \frac{b^2}{a^2},$$

(*) Les notations seront les mêmes que dans notre Mémoire sur les coordonnées trilinéaires (2[e] série, t. II, p. 289).

puis

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\left(\frac{\mathrm{B}c_1}{\mathrm{A}c_1}+\frac{\mathrm{B}c_2}{\mathrm{A}c_2}\right)\frac{b}{a}=-\frac{2\mathrm{A}_{12}}{\mathrm{A}_{11}},$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\left(\frac{\mathrm{A}c_1}{\mathrm{B}c_1}+\frac{\mathrm{A}c_2}{\mathrm{B}c_2}\right)\frac{a}{b}=-\frac{2\mathrm{A}_{12}}{\mathrm{A}_{22}}.$$

Ces deux dernières relations donnent, en les multipliant,

$$\frac{4\mathrm{A}_{12}^2}{\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}}=\frac{\mathrm{A}c_1.\mathrm{B}c_2}{\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1}+\frac{\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1}{\mathrm{A}c_1.\mathrm{B}c_2}+2,$$

d'où

$$\frac{4\mathrm{A}_{12}^2}{\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}}-4=\frac{(\mathrm{A}c_1.\mathrm{B}c_2-\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1)^2}{\mathrm{A}c_1.\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1.\mathrm{B}c_2};$$

mais les quatre points A, c_1, c_2, B donnent

$$\mathrm{AB}.c_1c_2=\mathrm{A}c_1.\mathrm{B}c_2-\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1;$$

on a donc, en désignant par c' la longueur c_1c_2,

$$\mathrm{A}_{12}^2=\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\left(1+\frac{c^2.c'^2}{4\mathrm{A}c_1.\mathrm{A}c_2.\mathrm{B}c_1.\mathrm{B}c_2}\right).$$

On sait que, si par un point A on mène une droite arbitraire AB, rencontrant la conique aux points c_1, c_2, le rapport du produit $\mathrm{A}c_1.\mathrm{A}c_2$ au carré du demi-diamètre C parallèle à la droite est constant. Désignons ce rapport par π_a pour le point A, par π_b, π_c pour les deux autres sommets B et C. Nous aurons

$$\frac{\mathrm{A}_{22}}{\mathrm{A}_{11}}=\frac{b^2\pi_b}{a^2\pi_a},\qquad \mathrm{A}_{12}^2=\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}\left(1+\frac{c^2c'^2}{4\pi_a\pi_b\mathrm{C}^4}\right),$$

de sorte que l'équation de la conique s'écrit sous la forme

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2+2\sum ab\,\alpha\beta\left(\pi_a\pi_b+\frac{c^2.c'^2}{4\mathrm{C}^4}\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

Les expressions sous le signe $\sum$ donnent chacune deux autres termes par une simple permutation. Les quantités a', b' seraient les cordes de la conique déterminées par les côtés a, b du triangle de référence; A, B les demi-diamètres parallèles à ces mêmes côtés.

La forme sous laquelle se présente l'équation de la conique permet d'écrire immédiatement l'équation d'une conique circonscrite, conjuguée ou inscrite au triangle de référence.

Si la conique doit être circonscrite, on a

$$\pi_a = \pi_b = \pi_c = 0;$$

l'équation est donc, en remarquant que $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$,

$$\frac{c\alpha\beta}{C^2} + \frac{b\alpha\gamma}{B^2} + \frac{a\beta\gamma}{A^2} = 0.$$

Si la conique est inscrite, on a

$$a' = b' = c' = 0;$$

donc son équation peut s'écrire

$$\sum a^2\pi_a\alpha^2 + 2\sum ab\,\alpha\beta\,\pi_a^{\frac{1}{2}}\pi_b^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Si la conique est conjuguée, on voit aisément que

$$\pi_a\pi_b + \frac{c^2c'^2}{4C^4} = 0,$$

car cette condition signifie que les points A, B sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection c_1, c_2 de la droite AB avec la conique. En effet, dans ce cas, on a

$$AB.c_1c_2 = -2Ac_2.Bc_1, \quad AB.c_1c_2 = Ac_1\ Bc_2.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 42.)

On a donc

$$\overline{AB}^2 . \overline{c_1c_2}^2 + 4 Ac_1 . Ac_2 . Bc_1 . Bc_2 = 0.$$

L'équation de la conique conjuguée est donc

$$\sum a^2 \pi_a \alpha^2 = 0.$$

II. Au moyen d'un calcul analogue au précédent, l'équation de la surface du second ordre, rapportée au tétraèdre de référence ABCD, se met sous la forme

$$\sum a^2 \pi_a \alpha^2 + 2 \sum ab\alpha\beta \left(\pi_a \pi_b + \frac{l^2 l'^2}{4 L^4} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dans cette équation, a, b, c, d sont les aires des faces opposées aux sommets de même nom ; l est la longueur de l'arête ab ; l' la partie de cette arête comprise dans la surface, et L le demi-diamètre parallèle à l'arête l. Les quantités π_a, π_b,... sont, comme ci-dessus, les rapports constants que l'on obtient en divisant le produit des segments déterminés sur une droite issue des points A ou B par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.

Les distances d'un point de la surface aux faces respectives a, b, c, d étant désignées par α, β, δ, γ, une simple permutation de lettres suffira pour écrire tous les termes de l'équation.

Surface circonscrite au tétraèdre de référence. — Si la surface du second ordre passe par les sommets du tétraèdre ABCD, on a

$$\pi_a = \pi_b = \pi_c = \pi_d = 0 ;$$

comme, de plus, $l = l'$, l'équation est

$$\sum \frac{a . b . l^2}{L^2} \alpha\beta = 0.$$

La sphère circonscrite aurait pour équation

$$\sum a \, . \, b \, . \, l^2 \alpha\beta = 0.$$

Surface tangente aux arêtes du tétraèdre de référence. — Si la surface touche les arêtes du tétraèdre, les cordes l' sont nulles ; l'équation est donc

$$\sum a^2 \pi_a \alpha^2 + 2 \sum ab \, \alpha \, . \, \beta \pi_a^{\frac{1}{2}} \pi_b^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Surface conjuguée au tétraèdre. — Cette équation est évidemment

$$\sum a^2 \pi_a \alpha^2.$$

Remarque. — On peut également donner une interprétation géométrique aux coefficients d'une courbe ou d'une surface du second ordre, en supposant que les variables soient les distances des sommets du triangle de référence à une tangente, ou les distances des sommets du tétraèdre de référence à un plan tangent.

III. Désignons par r, r' les points d'intersection d'une transversale issue d'un point R avec une courbe ou surface du second ordre, par ρ le demi-diamètre parallèle à la droite, nous dirons que le rapport $\dfrac{\mathrm{R}r \, . \, \mathrm{R}r'}{\rho^2} = \pi_r$ est la *caractéristique* du point R. Cette caractéristique est positive pour un point situé en dehors de la courbe ou de la surface, négative dans le cas contraire.

Si l'on désigne par δ la distance du point R, et par δ' la distance du centre à la polaire ou au plan polaire du point R, on a aussi

$$\pi_r = -\frac{\delta}{\delta'}.$$

L'interprétation analytique de la caractéristique d'un point est très-facile. Soit $F = 0$ l'équation d'une courbe du second ordre; représentons par $\Delta = 0$ la condition qui exprime que la courbe se réduit au système de deux droites, et par $P = 0$ la condition qui exprime que le centre de la courbe est à l'infini, on aura

$$\pi_r = -F\frac{P}{\Delta},$$

les variables, dans la fonction F, étant remplacées par les coordonnées du point R.

Si F est une surface du second ordre, $\Delta = 0$ est la condition qui exprime que la surface représente un cône, $P = 0$ est toujours la condition qui indique que le centre est à l'infini.