HERMANN LAURENT

Note sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 540-552

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__540_1>

NOTE SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. Hermann LAURENT,
Docteur ès Sciences.

Introduction.

Si nous désignons par $\varphi(x)$ la valeur de la fraction

(*) La date de ce tableau montre que la méthode n'est pas accommodée à des résultats connus d'avance. Je l'avais envoyé à l'Académie des Sciences de Copenhague sous pli cacheté, pour attendre la publication promise par M. Chasles, par déférence pour ce géomètre et aussi parce que j'avais profité de sa publication du 4 septembre. Cette discrétion est devenue superflue par la publication de M. Chasles du 26 février, et le billet étant décacheté, la Société savante a bien voulu faire imprimer mon petit tableau.

continue périodique

$$(1)\qquad \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\ddots}}},$$

nous aurons, en supposant cette fraction convergente,

$$x:(1+\varphi)=\varphi$$

ou

$$(2)\qquad \varphi^2+\varphi-x=0,$$

d'où l'on tire, en ne prenant que la racine de cette équation qui s'évanouit avec x,

$$(3)\qquad \varphi(x)=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}.$$

Nous avons défini la fonction φ par la fraction (1), mais comme cette fraction peut perdre sa convergence pour certaines valeurs de x, c'est désormais à l'aide de l'équation (3) que nous définirons la fonction φ. Ce sera, si l'on veut, la racine de l'équation (2) non développable par la série de Lagrange; si nous désignons par $-\psi(x)$ l'autre racine, la formule de Lagrange donnera

$$(4)\left\{\begin{aligned}
[\psi(x)]^k &= \left[\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right]^k \\
&= 1+k\frac{x}{1}+k\frac{(k-3)}{1.2}x^2+k\frac{(k-4)(k-5)}{1.2.3}x^3 \\
&\quad +k\frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{1.2.3.4}x^4 \\
&\quad +k\frac{(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{1.2.3.4.5}x^5+\ldots,
\end{aligned}\right.$$

et l'on aura entre les fonctions φ et ψ les relations

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi(x).\psi(x) = x, \\ \psi(x) = 1 + \varphi(x). \end{cases}$$

Les formules que nous venons d'établir nous seront très-utiles dans la suite, mais il faut en préciser le sens. A cet effet, il suffit de rappeler que le radical $\sqrt{1+4x}$ doit toujours être pris positivement lorsqu'il est réel, et en général il ne s'agira jamais que de la valeur de ce radical dont la partie réelle est positive.

Définition de la fonction u_n.

Ceci posé, formons les réduites de la fraction (1); si nous désignons par u_n le dénominateur de la $n+1$ réduite, nous aurons

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1, & \\ u_1 = 1 + x, & u_2 = 1 + 2x, \\ u_3 = 1 + 3x + x^2, & u_4 = 1 + 4x + 3x^2, \\ u_5 = 1 + 5x + 6x^2 + x^3, & u_6 = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La loi de formation est donnée, comme on sait, par la formule

$$(6)\qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}x,$$

en sorte que les fonctions u_n sont liées entre elles par l'équation aux différences (6), ou, ce qui revient au même,

$$\Delta^2 u + \Delta u - ux = 0.$$

Expression générale de u_n.

D'après la formule (6), pour trouver le coefficient de x^i dans u_{n+1}, il faut ajouter au coefficient de x^i dans u_n le coefficient de x^{i-1} dans u_{n-1} ; les coefficients de x^0 sont alors égaux à 1 dans toutes les fonctions u ; les coefficients de x^1 sont 0, 1, 2, 3, 4,... ; ceux de x^2 sont d'abord 1, puis 1 augmenté du second nombre naturel, c'est-à-dire le second nombre figuré du second ordre, puis le second nombre figuré du second ordre augmenté du troisième nombre naturel, c'est-à-dire le troisième nombre figuré du second ordre, etc. On verrait de même que les coefficients de x^i sont les nombres figurés de l'ordre i. On a donc

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} u_n = 1 + nx &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^2 \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} x^3 \\ &+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

le développement devant être arrêté dès que l'on trouve un terme nul.

De l'équation $u_n = 0$.

L'équation $u_n = 0$ jouit de propriétés remarquables que nous allons d'abord étudier.

Si nous considérons la suite des fonctions u_0, u_1, u_2,..., u_r, l'équation (6) nous montre que deux fonctions consécutives ne peuvent s'annuler à la fois ; en effet, si l'on avait $u_n = u_{n+1} = 0$, on en conclurait $u_{n-1} = 0$ et ainsi de suite jusqu'à $u_0 = 0$, ce qui est absurde, puisque u_0 est constant et égal à 1. On voit de plus qu'en supposant $x < 0$, si l'une des fonctions u_n passe par zéro, celle qui la précède et celle qui la suit immédiatement sont de signes contraires ; on peut donc appliquer aux fonctions u_n la règle de Sturm. Or pour $x = -\infty$ les signes de u_0,

$u_1, u_2, \ldots, u_r$ sont respectivement

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \ldots;$$

pour x voisin de zéro, les signes des fonctions u sont $+$; de $-\infty$ à o la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_r$ a donc perdu toutes ses variations. Or, si $r = 4i + 1$ ou $4i + 2$, la suite en question avait $2i + 1$ variations pour $x = -\infty$, son degré était $2i$; donc elle a $2i$, c'est-à-dire toutes ses racines réelles et négatives. Le cas où $r = 4i + 3$ et $4i$ se discute de la même façon. Ainsi on peut énoncer ce théorème remarquable :

L'équation $u_n = 0$, obtenue en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fraction (1), *a toutes ses racines réelles et négatives.*

Ajoutons à cela que la fonction u_{n-1} joue par rapport à u_n le même rôle que $\frac{d(\mathrm{F}x)}{dx}$ par rapport à $\mathrm{F}(x)$ dans le théorème de Rolle. Ainsi les racines des équations

$$u_{n-1} = 0, \quad u_n = 0$$

se séparent mutuellement.

Fonction plus générale que u_n.

Considérons actuellement la série indéfinie

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = 1 + nx + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^2 \\ + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} x^3 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle n est un nombre quelconque; les premiers termes de cette série représentent u_n lorsque n est positif et entier.

La série (8) est évidemment convergente pour toutes les valeurs du module de x inférieures à $\frac{1}{4}$; en effet, le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{(n-i)\ldots(n-2i-1)}{1.2.3\ldots i+1}x^{i+1} : \frac{(n-i+1)\ldots(n-2i+1)}{1.2.3\ldots i}x^i$$

ou

$$\frac{(n-2i-1)(n-2i)}{(n-i+1)(i+1)}x,$$

c'est-à-dire $4x$ pour $i=\infty$. Nous supposerons donc $\text{mod.}\, x<\frac{1}{4}$, et alors, pour trouver la valeur de la série (8), nous la comparerons avec la formule (4). Si l'on différentie cette formule et si l'on divise les deux membres par k, il vient

$$(9)\quad \frac{1}{k}\frac{d}{dx}\psi^k(x)=1+\frac{k-3}{1}x+\frac{(k-4)(k-5)}{1.2}x^2+\ldots.$$

En faisant

$$k-3=n \quad \text{ou} \quad k=n+3,$$

on trouve pour second membre la série (8), et par conséquent on a

$$(10)\qquad f(x)=\frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\psi^{n+3}(x).$$

Expression de u_n à l'aide de la fonction ψ ou φ.

Si dans la formule (8) on suppose n entier, on peut la mettre sous la forme suivante

$$f(x)=u_n+\frac{(-1)(-2)\ldots(-n+2)}{1.2.3\ldots(n+2)}x^{n+2}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$(11)\left\{\begin{aligned} f(x) &= u_n + (-x)^{n+2} \\ &\quad\times\left[1 + \frac{n+4}{1}(-x) + \frac{(n+5)(n+6)}{1.2}(-x)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(n+6)(n+7)(n+8)}{1.2.3}(-x)^3 - \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Or, si dans la formule (9) on fait

$$k = -n - 1,$$

on trouve

$$-\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\psi^{-(n+1)}(x) = 1 + \frac{n+4}{1}(-x) + \frac{(n+5)(n+6)}{1.2}(-x)^2 + \ldots,$$

et la formule (11) devient alors

$$f(x) = u_n - (-x)^{n+2}\frac{d}{dx}\frac{\psi^{-(n+1)}(x)}{n+1},$$

ou, remplaçant $f(x)$ par sa valeur tirée de (10),

$$\frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\psi^{n+3}(x) = u_n - (-x)^{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\frac{\psi^{-(n+1)}(x)}{n+1}.$$

Tirons de cette équation la valeur de u_n et remplaçons ψ par sa valeur (4), il vient

$$u_n = \frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+3} + \frac{(-x)^{n+2}}{n+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4x}}\right)^{n+1}$$

ou bien encore

$$u_n = \frac{1}{n+3}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+3} + \frac{(-x)^{n+2}}{n+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}\right)^{n+1}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, on trouve, réductions faites,

$$(12)\quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} - (-1)^{n+2}\left(\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^{n+2}\right] \\ \text{ou} \\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\psi^{n+2}(x) - (-1)^{n+2}\varphi^{n+2}(x)\right]. \end{cases}$$

Cette équation montre que u_n s'exprime rationnellement à l'aide de la valeur de la fraction (1); de plus, on voit que u_n est une fonction rationnelle des racines de l'équation (2).

Résolution de $u_n = 0$.

La formule (12) a été établie dans l'hypothèse

$$\text{mod. } x < 4,$$

mais elle est générale, car ses deux membres sont deux polynômes égaux pour des valeurs de x en nombre supérieur à leur degré.

Cette formule (12) peut servir à la résolution de l'équation

$$u_n = 0.$$

En effet, d'après la formule en question, l'équation précédente peut s'écrire

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+2};$$

mais comme nous avons multiplié par $\sqrt{1+4x}$, la racine $x = -\frac{1}{4}$ devra être rejetée, et l'on aura

$$1+\sqrt{1+4x} = \alpha - \alpha\sqrt{1+4x},$$

α désignant une racine de l'équation binôme

$$\alpha^{n+2} = 1$$

différente de l'unité. On en déduit

$$\sqrt{1+4x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1},$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} - 1\right)\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + 1\right)$$

ou

$$x = \frac{-\alpha}{(\alpha + 1)^2} = \frac{-1}{\frac{1}{\alpha} + \alpha + 2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant α par sa valeur

$$\cos\frac{2k\pi}{n+2} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n+2},$$

$$x = \frac{-1}{4\cos^2\frac{k\pi}{n+2}},$$

Discussion des racines de l'équation $u_n = 0$.

L'équation $u_n = 0$ est donc du nombre de celles que l'on peut résoudre par radicaux, et en effet les racines sont exprimables rationnellement les unes à l'aide des autres.

La formule

$$x = \frac{-1}{4\cos^2\frac{k\pi}{n+2}},$$

à laquelle nous venons d'arriver, est beaucoup trop générale; ainsi, pour $n = 0$, elle nous fournit deux valeurs pour x, tandis que $u_0 = 0$ n'admet pas de racines: cela tient à l'évanouissement du radical $\sqrt{1+4x}$, cependant cette formule nous donnera toutes les solutions de $u_n = 0$, et seulement celles-là si l'on assujettit l'argument du cosinus à rester compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire, en observant que le terme indépendant de x dans u_n est 1,

$$u_n = x^h \left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{2\pi}{n+2}\right)$$
$$\times \left(\frac{1}{x} + 4\cos^2\frac{3\pi}{n+2}\right)\cdots,$$

h désignant le degré de la fonction u_n.

Relations entre les coefficients et les racines.

Les relations entre les coefficients et les racines de l'équation $u_n = 0$ conduisent à des formules diverses parmi lesquelles on distingue les suivantes :

$$n = 4\left(\cos^2\frac{\pi}{n+2} + \cos^2\frac{2\pi}{n+2} + \ldots\right),$$

$$4\cos^2\frac{\pi}{n+2} \times 4\cos^2\frac{2\pi}{n+2} \times \ldots = 1 \text{ ou un nombre figuré.}$$

On peut écrire ces deux relations ainsi qu'il suit :

$$\frac{n}{8} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \cos^2\frac{k\pi}{n+2},$$

$$\prod_{k=1}^{k=n+1} 2\cos\frac{k\pi}{n+2} = 1 \text{ ou un nombre figuré,}$$

abstraction faite dans la seconde formule des valeurs de k qui pourraient annuler le produit $\prod$.

Réduction de la fraction (1) *en série.*

En général, quand on veut transformer en série une fraction continue de la forme

$$z = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}},$$

on a recours à la formule d'Euler,

$$z = \frac{a_1}{Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_1 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_2 Q_3} - \ldots \pm \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_{n-1} Q_n} \mp \ldots$$

On sait en outre que la série précédente converge ou diverge en même temps que la fraction dont elle est le développement, et que Q_n est le dénominateur de la n^{ieme} réduite (ainsi $Q_1 = b_1$).

Si nous supposons

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = x, \quad b_1 = b_2 = \ldots = 1,$$

il vient [*voir* les équations (1), (2) et (3)]

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{x}{u_0} - \frac{x^2}{u_0 u_1} + \frac{x^3}{u_1 u_2} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{u_{n-1} u_n} \mp \ldots$$

Cette série sera convergente si

$$\text{mod.} \sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{u_{n-1} u_n}} < \alpha < 1$$

ou, ce qui revient au même, si

$$(14) \qquad \lim.\text{mod.}\, x \frac{1}{\sqrt[n]{u_{n-1} u_n}} < 1.$$

Or, le produit $u_{n-1} u_n$ se compose de n ou $n - 1$ facteurs binômes de la forme

$$1 + 4x\cos^2\frac{p\pi}{q};$$

en désignant alors par $1 + 4x\cos^2\omega$ celui de ces facteurs qui a le plus petit module, le premier membre de la formule (14) aura un module inférieur à

$$\text{mod. lim. } \frac{x}{1 + 4x\cos^2\omega}.$$

La limite de cette expression est x pour les valeurs positives de cette variable, en sorte que l'on peut en conclure la convergence de la série (13) pour $x < 1$. Mettons l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\,u_n}}$$

sous la forme

$$\sqrt{\sqrt[n]{\frac{x^{2(n+1)}}{U + V}}}. \tag{15}$$

U dans cette formule désignera le produit de n facteurs de la forme

$$1 + 4x\cos^2\theta,$$

θ étant moindre que $\frac{\pi}{4}$; V contiendra les autres facteurs. La limite de l'expression (15) prend alors une valeur dont le module est inférieur à

$$\text{mod.} \sqrt{\frac{x}{1 + 4x\cos^2 t}}\sqrt{\frac{x}{1 + 4x\cos^2\omega}},$$

t désignant un arc compris entre o et $\frac{\pi}{4}$ et ω un arc compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La discussion de cette formule permettra de reconnaître dans les différents cas la convergence de la série (13) et par suite de la fraction continue lorsque x ne sera pas positif.

Nous pouvons ainsi écrire, au lieu de (13),

$$\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1+x}+\frac{x^3}{(1+x)(1+2x)}-\ldots$$
$$\pm\frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\,u_n},$$

formule dans laquelle on peut aussi remplacer

$$\frac{x^{n+1}}{u_{n-1}\,u_n}$$

par

$$\frac{x}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{x}+4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x}+4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\\ \times\left(\frac{1}{x}+4\cos^2\frac{2\pi}{n+2}\right)\left(\frac{1}{x}+4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdots\end{array}\right\}}$$

Si l'on pose alors

$$\frac{1}{x}=z,$$

il vient

$$\frac{-z+\sqrt{z^2+4z}}{2}=1-\frac{1}{z+1}+\ldots$$
$$\pm\frac{1}{\left(z+4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\right)\left(z+4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\right)\cdots}\mp\ldots,$$

et cette formule aura lieu pour toutes les valeurs positives de z, et en général pour toutes les valeurs de z pour lesquelles le second membre sera convergent.