

A. HERMANN

**Note sur l'erreur dans le calcul de π par
la méthode des isopérimètres**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 509-510

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_509_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres ;

PAR M. A. HERMANN,

Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au lycée de Tournon.

On sait que lorsqu'on passe d'un polygone au suivant, la différence entre le rayon et l'apothème du second est moindre que le quart de cette différence pour le premier.

Cette remarque conduit facilement à une limite de l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres.

Désignons par r_k et a_k le rayon et l'apothème du polygone dont le nombre des côtés est 2^k ; r_2 et a_2 seront le rayon et l'apothème du carré, de sorte que $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $a_2 = \frac{1}{2}$.

Pour obtenir π à l'approximation $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{r}{a_k} - \frac{r}{r_k} < \frac{1}{10^m},$$

ou

$$(1) \quad r_k - a_k < \frac{a_k \cdot r_k}{2 \cdot 10^m}.$$

Or, r_k et a_k étant, tous deux, plus grands que l'apothème $\frac{1}{2}$ du carré, l'inégalité précédente sera vérifiée dès qu'on aura

$$(2) \quad r_k - a_k < \frac{1}{8 \cdot 10^m}.$$

Mais on a, d'après le théorème rappelé,

$$\begin{aligned} r_3 - a_3 &< \frac{1}{4} (r_2 - a_2), \\ r_4 - a_4 &< \frac{1}{4^2} (r_2 - a_2), \\ &\dots\dots\dots, \\ r_k - a_k &< \frac{1}{4^{k-2}} (r_2 - a_2). \end{aligned}$$

Il suffira donc, pour que l'inégalité (2) existe, qu'on ait

$$\frac{1}{4^{k-2}} (r_2 - a_2) < \frac{1}{8 \cdot 10^m},$$

ou, en remplaçant r_2 et a_2 par leurs valeurs $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4^{k-2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{8 \cdot 10^m},$$

ce qui donne

$$(3) \quad 4^{k-3} > 10^m (\sqrt{2} - 1);$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\begin{aligned} (k-3) \cdot \log 4 &> m + \log(\sqrt{2} - 1), \\ k &> 3 + \frac{m}{\log 4} + \frac{\log(\sqrt{2} - 1)}{\log 4}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente est vérifiée, *à fortiori*, lorsqu'on donne à k la valeur $3 + 2m$, ou une valeur plus grande (*). Et il est facile d'en conclure que si l'on quadruple le nombre des côtés d'un polygone, on obtient une décimale de plus dans la valeur approchée du nombre π .

(*) Quand le nombre entier m est plus grand que l'unité, il suffit de prendre k égal à $2 + 2m$ pour que l'inégalité $4^{k-3} > 10^m (\sqrt{2} - 1)$ ait lieu. Et si m est égal à 7, ou plus grand que 7, on satisfait à cette inégalité en posant $k = 2m$. G.