A. HERMANN

Note sur l'erreur dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 509-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__509_0>

NOTE

sur l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres ;

Par M. A. HERMANN,
Ancien élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au lycée de Tournon.

On sait que lorsqu'on passe d'un polygone au suivant, la différence entre le rayon et l'apothème du second est moindre que le quart de cette différence pour le premier.

Cette remarque conduit facilement à une limite de l'erreur commise dans le calcul de π par la méthode des isopérimètres.

Désignons par r_k et a_k le rayon et l'apothème du polygone dont le nombre des côtés est 2^k ; r_2 et a_2 seront le rayon et l'apothème du carré, de sorte que $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $a_2 = \frac{1}{2}$.

Pour obtenir π à l'approximation $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{2}{a_k} - \frac{2}{r_k} < \frac{1}{10^m},$$

ou

$$(1) \qquad r_k - a_k < \frac{a_k . r_k}{2 . 10^m}.$$

Or, r_k et a_k étant, tous deux, plus grands que l'apothème $\frac{1}{2}$ du carré, l'inégalité précédente sera vérifiée dès qu'on aura

$$(2) \qquad r_k - a_k < \frac{1}{8 . 10^m}.$$

Mais on a, d'après le théorème rappelé,

$$r_3 - a_3 < \frac{1}{4}(r_2 - a_2),$$
$$r_4 - a_4 < \frac{1}{4^2}(r_2 - a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$r_k - a_k < \frac{1}{4^{k-2}}(r_2 - a_2).$$

Il suffira donc, pour que l'inégalité (2) existe, qu'on ait

$$\frac{1}{4^{k-2}}(r_2 - a_2) < \frac{1}{8.10^m},$$

ou, en remplaçant r_2 et a_2 par leurs valeurs $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4^{k-2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{8.10^m},$$

ce qui donne

$$(3) \qquad 4^{k-3} > 10^m(\sqrt{2} - 1);$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$(k-3).\log 4 > m + \log(\sqrt{2} - 1),$$
$$k > 3 + \frac{m}{\log 4} + \frac{\log(\sqrt{2} - 1)}{\log 4}.$$

L'inégalité précédente est vérifiée, *à fortiori*, lorsqu'on donne à k la valeur $3 + 2m$, ou une valeur plus grande (*). Et il est facile d'en conclure que si l'on quadruple le nombre des côtés d'un polygone, on obtient une décimale de plus dans la valeur approchée du nombre π.

(*) Quand le nombre entier m est plus grand que l'unité, il suffit de prendre k égal à $2 + 2m$ pour que l'inégalité $4^{k-3} > 10^m(\sqrt{2} - 1)$ ait lieu. Et si m est égal à 7, ou plus grand que 7, on satisfait à cette inégalité en posant $k = 2m$. G.