NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-C. PAGE

Note sur les mouvements relatifs

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 492-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__492_1>

NOTE SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. E.-C. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

La question que l'on désigne en Mécanique sous le titre de *mouvements relatifs* se réduit au problème suivant :

Étant donnés la vitesse et l'accélération d'un point par rapport à un système mobile, et le mouvement de ce système par rapport à un système fixe, trouver la vitesse et l'accélération du point relativement au système fixe.

Ou, en renversant le problème :

Étant données la vitesse et l'accélération d'un point relativement à un système fixe, trouver la vitesse et l'accélération de ce point relativement à un système mobile dont on connaît le mouvement par rapport au système fixe.

Appelons vitesse et accélération absolues la vitesse et l'accélération du point par rapport au système fixe;

Vitesse et accélération relatives, la vitesse et l'accélération par rapport au système mobile.

Enfin, vitesse d'entraînement et accélération d'entraînement, la vitesse et l'accélération dont le point se trouverait animé à un instant donné, si à cet instant il devenait fixe par rapport au système mobile.

Dans le cas d'un simple mouvement de translation, l'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement.

Dans le cas d'un mouvement de rotation, l'accélération absolue n'est pas la résultante de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement; mais il faut joindre à ces deux composantes une troisième composante qu'on nomme *accélération centripète composée.*

Il est important de rechercher l'origine de cette troisième composante et de faire voir comment elle est la conséquence de cé principe fondamental de Mécanique : *Les accélérations se composent entre elles exactement de la même manière que les vitesses.*

Cette question a été traitée d'une manière explicite par Coriolis dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique* (XXIV^e cahier). Il a tiré des formules générales de la Mécanique analytique un théorème remarquable sur la force centrifuge composée.

Depuis le Mémoire de Coriolis, son théorème a été démontré géométriquement de plusieurs manières; mais ces démonstrations paraissent encore assez difficiles pour qu'on évite de les exposer dans l'enseignement tout à fait élémentaire; on les renvoie à une partie plus avancée de la Mécanique. Cette marche a l'inconvénient grave de jeter une certaine obscurité sur le principe de la composition des accélérations. Les élèves peuvent être induits à penser que ce principe n'est pas absolument vrai, et qu'il ne s'applique au mouvement de rotation qu'avec certaines réserves.

Dans la Note qui suit, on a essayé de présenter la composition des accélérations d'une manière assez élémentaire pour qu'on puisse l'exposer complétement au commencement même de la Mécanique et que, par suite, on puisse aborder immédiatement la question du mouvement apparent des corps à la surface de la terre, en tenant compte de la rotation.

Accélération dans le mouvement rectiligne.

Quand un point se meut en ligne droite et que sa vitesse varie en fonction du temps, la rapidité plus ou moins grande avec laquelle cette vitesse augmente ou diminue se nomme *accélération*. On peut donc dire que, dans le mouvement rectiligne, l'accélération n'est autre chose que la vitesse de la vitesse.

La vitesse V d'un point A peut être représentée en grandeur et en direction au moyen d'une droite AV. La

Fig. 1.

vitesse V étant variable, la longueur de la droite AV varie, et la vitesse V', avec laquelle l'extrémité de la droite AV s'éloigne ou se rapproche du point A, est justement l'accélération. Cette vitesse V' peut être représentée elle-même au moyen d'une droite VV'. Le sens dans lequel la droite VV' est portée indique si l'accélération est positive ou négative, c'est-à-dire si la vitesse est croissante ou décroissante.

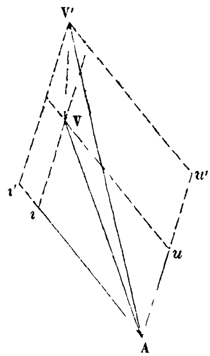
Composition des accélérations quand la vitesse est décomposée suivant des directions fixes.

Lorsqu'un point A est animé de deux vitesses u et i, suivant des directions fixes Au et Ai, la vitesse résultante V est représentée en grandeur et en direction par la diagonale AV du parallélogramme construit sur les deux vitesses composantes Au et Ai.

Si les deux composantes reçoivent des accroissements uu' et ii', la nouvelle résultante V$'$ est représentée par la diagonale AV$'$ du parallélogramme construit sur Au+uu' et Ai+ ii'.

Le déplacement VV$'$ de l'extrémité de la diagonale est

Fig. 2.



représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les accroissements uu' et ii'.

Si, au lieu de recevoir des accroissements brusques, les vitesses composantes u et i varient d'une manière continue sans changer de direction, les droites uu', ii' représentent les accélérations composantes, c'est-à-dire les vitesses avec lesquelles les extrémités des côtés Au et Ai s'éloignent ou se rapprochent du point A.

La diagonale VV$'$ représente l'accélération résultante. C'est la vitesse avec laquelle se meut par rapport au point A l'extrémité de la droite AV qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point A.

Pour faire bien comprendre cette manière de représenter l'accélération, imaginons par le point mobile un système géométrique mobile avec ce point, mais n'ayant qu'un simple mouvement de translation; par exemple, trois axes rectangulaires passant toujours par le point A, et restant constamment parallèles à eux-mêmes.

Tant que la droite AV, qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point A, reste fixe et invariable par rapport au système mobile, le mouvement du point est rectiligne et uniforme; mais aussitôt que le mouvement du point cesse d'être uniforme et rectiligne, la droite AV varie en grandeur et en direction, et la vitesse avec laquelle l'extrémité de cette droite se meut par rapport au système mobile représente en grandeur et en direction l'accélération du point.

On en conclut immédiatement ce principe fondamental :

Les accélérations se composent et se décomposent entre elles exactement de la même manière que les vitesses.

Si les accélérations composantes u' et i' sont entre elles dans le même rapport que les vitesses u et i, l'accélération résultante VV$'$ est dirigée dans le même sens que la vitesse V, et cette dernière ne fait que changer de grandeur sans changer de direction. Mais si les accélérations composantes ne sont pas proportionnelles aux vitesses composantes, l'accélération résultante n'est pas dirigée dans le sens de la vitesse résultante, et cette dernière varie à la fois en grandeur et en direction; dans ce cas, le point A décrit une ligne courbe.

La composition des accélérations u' et i' est tout à fait indépendante de la valeur des vitesses u et i. Elle reste encore la même lorsque l'une de ces vitesses est nulle.

Ainsi, quand le point mobile décrit une ligne courbe, la composante de la vitesse suivant la normale est nulle; mais l'accélération suivant cette normale, ou plus exactement, l'accélération suivant la direction fixe avec laquelle la normale vient coïncider à l'instant que l'on considère, n'est pas nulle, et, pour avoir l'accélération totale, il faut composer l'accélération suivant la direction normale avec l'accélération tangentielle.

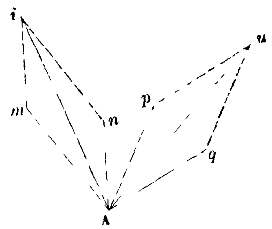
Composition des accélérations quand la vitesse est décomposée suivant des directions variables.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la vitesse décomposée suivant des droites ayant des directions fixes ; mais on peut concevoir la vitesse décomposée suivant des droites dont les directions varient d'une manière continue.

En effet, supposons la vitesse décomposée suivant quatre directions fixes Am, An, Ap, Aq ; soient m, n, p, q les quatre composantes.

Pour obtenir la résultante V, nous pouvons commencer par prendre la résultante i des deux vitesses m et n,

Fig. 3.



puis la résultante u des deux vitesses p et q. La vitesse V est alors décomposée suivant les deux composantes u et i. Or, si les vitesses m et n ne restent pas constamment dans le même rapport entre elles, leur résultante i varie en grandeur et en direction. De même, la résultante u des vitesses p et q peut varier en grandeur et en direction; nous pouvons donc concevoir la vitesse V décomposée suivant des droites Ai et Au dont les directions varient d'une manière continue.

Dans ce cas, on commettrait une erreur grave en représentant l'accélération du point A par la résultante des vitesses avec lesquelles les extrémités des composantes i et u s'éloignent ou se rapprochent du point A. Il faut prendre la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des composantes; or, ces vitesses ne sont généralement pas dirigées suivant les composantes elles-mêmes.

En effet, les composantes m, n, p, q ayant des directions fixes, l'accélération du point A est la résultante des vitesses avec lesquelles les extrémités de ces composantes s'éloignent ou se rapprochent du point A.

Si nous commençons par prendre la résultante des deux accélérations composantes dirigées suivant Am et An, cette résultante sera la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la diagonale Ai, et cette vitesse ne sera généralement pas dirigée suivant Ai. De même, la résultante des deux accélérations dirigées suivant Ap et Aq sera la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la diagonale Au.

En prenant la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des diagonales Ai et Au, nous aurons l'accélération totale, c'est-à-dire la résultante de toutes les accélérations dirigées suivant les droites fixes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quand la vitesse d'un point est décomposée suivant des axes ayant des directions fixes ou variables, l'accélération de ce point est toujours représentée, en grandeur et en direction, par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des droites qui re-

présentent en grandeur et en direction les vitesses composantes.

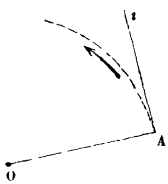
Accélération centripète.

Une droite d'une longueur constante

$$OA = r$$

tourne dans un plan autour d'un point fixe O avec une

Fig. 4.



vitesse angulaire constante ω. La vitesse du point A est représentée par une droite

$$Ai = r.\omega$$

dirigée perpendiculairement au rayon OA dans le sens du mouvement. L'accélération du point A est représentée par la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la droite Ai, par rapport à un système géométrique passant par le point A, et animé d'un simple mouvement de translation.

Or, puisque la droite Ai est toujours perpendiculaire au rayon OA, et que ce dernier tourne avec la vitesse angulaire ω, il est clair que la droite Ai tourne autour du point A avec la même vitesse angulaire ω par rapport au système géométrique; donc l'extrémité de Ai est animée par rapport à ce système d'une vitesse parallèle à AO, dirigée du point A vers le point O, et égale à

$$Ai.\omega = r.\omega^2.$$

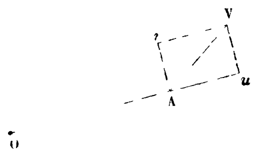
L'accélération du point A est donc dirigée vers le centre et égale au produit du rayon par le carré de la vitesse angulaire. C'est l'accélération centripète.

Accélération centripète composée.

Supposons que tandis que la droite OA tourne autour du point fixe O avec la vitesse angulaire constante ω, le rayon $OA = r$ ne reste pas invariable, mais que le point A glisse sur la droite mobile avec une vitesse constante u.

La vitesse V est la résultante de deux vitesses, l'une,

FIG. 5.



$Au = u$, dirigée suivant le rayon ; l'autre, $Ai = r.\omega$, dirigée perpendiculairement au rayon dans le sens du mouvement.

L'accélération du point A est représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des deux composantes Au et Ai.

Cherchons d'abord la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la composante Ai.

En vertu de la rotation, l'extrémité de Ai est animée d'une vitesse parallèle à AO, égale à

$$Ai.\omega = r.\omega^2.$$

Puisque r varie, $Ai = r.\omega$ varie en même temps. La vitesse avec laquelle r varie étant égale à u, la vitesse avec laquelle l'extrémité de Ai s'éloigne du point A est $u.\omega$.

L'extrémité de la composante Ai est donc animée de deux vitesses : l'une $r\omega^2$ perpendiculaire à la composante Ai, l'autre $u\omega$ perpendiculaire à la composante Au.

Maintenant, cherchons la vitesse avec laquelle se meut l'extrémité de la composante A u.

La vitesse u étant constante, la distance A u reste invariable. Mais, en vertu de la vitesse angulaire ω, l'extrémité de Au est animée d'une vitesse $u.\omega$ perpendiculaire à Au.

L'accélération du point A est donc la résultante de deux accélérations composantes, la première,

$$r.\omega^2,$$

dirigée dans le sens du rayon OA ; la seconde,

$$2.u.\omega,$$

perpendiculaire à la vitesse u du point A relativement à la droite mobile.

Cette composante $2u.\omega$ se retrouve constamment dans tous les problèmes de mouvements relatifs, quand le système mobile est animé d'un mouvement de rotation. Dans tous les cas, son origine est la même que dans le cas simple que nous venons d'examiner. Elle est toujours perpendiculaire à la vitesse relative u et dirigée dans le sens indiqué par la vitesse angulaire ω.

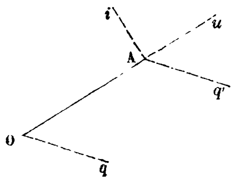
Bien que l'accélération $2u.\omega$ ne soit pas dirigée vers le centre, on la nomme *accélération centripète composée*. Cela vient de l'analogie de forme qu'elle présente avec l'accélération centripète.

En effet, l'accélération centripète, A$i.\omega$, est toujours perpendiculaire à la composante Ai, et égale au produit de cette composante par la vitesse angulaire ω.

L'accélération centripète composée, $2u.\omega$, est toujours perpendiculaire à la composante Au, et égale au double produit de cette composante par la vitesse angulaire ω.

Il peut arriver que le point O, autour duquel tourne la droite OA, ne reste pas immobile, mais soit animé

FIG. 6.



d'un mouvement quelconque; dans ce cas, pour avoir l'accélération du point A, il suffit de joindre l'accélération du point O aux accélérations trouvées précédemment.

Soit Oq la droite qui représente en grandeur et en direction la vitesse du point O.

La vitesse du point A sera la résultante de trois vitesses: 1° Aq' égale et parallèle à Oq; 2° $Au = u$; et, enfin, $Ai = r.\omega$.

L'accélération du point A sera représentée par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités de ces trois composantes.

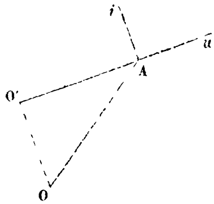
Or, la composante Aq' restant toujours égale et parallèle à la vitesse Oq du point O, l'extrémité de la droite Aq' possède exactement la même vitesse que l'extrémité de la droite Oq; donc il suffit de joindre l'accélération du point O aux autres accélérations trouvées précédemment.

Le centre de rotation, au lieu d'être situé sur la droite mobile, peut être pris hors de cette droite en un point quelconque du plan dans lequel elle se meut.

Ainsi le point A se meut en ligne droite avec une vitesse constante u, tandis que le plan déterminé par la direction de la vitesse u et par un point quelconque O tourne autour de ce point O avec la vitesse angulaire ω.

Du point O, abaissons sur la direction de la vitesse u la perpendiculaire OO'.

FIG. 7.



La droite O'A tourne autour du point O' avec la vitesse angulaire ω, tandis que le point O' décrit la circonférence dont OO' est le rayon. Comme le rayon OO' tourne autour du point O avec la vitesse angulaire ω, on voit que le point O' est animé d'une accélération centripète égale à $OO'.\omega^2$.

Donc le point A est animé :

1° D'une accélération centripète composée $2.u.\omega$ perpendiculaire à Au ;

2° D'une accélération centripète dirigée suivant AO' et égale à $AO'.\omega^2$;

3° D'une accélération parallèle à OO' et égale à $O'O.\omega^2$.

Les deux composantes $AO'.\omega^2$ et $O'O.\omega^2$ ont une résultante dirigée suivant AO et égale à $AO.\omega^2$.

Par conséquent, les deux composantes de l'accélération du point A sont l'accélération centripète composée $2u.\omega$ et l'accélération centripète $AO.\omega^2$.

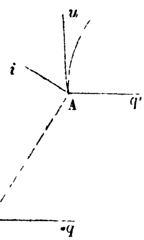
On démontrerait comme précédemment que si le point O est animé d'un mouvement quelconque, il faut joindre l'accélération de ce point aux autres composantes de l'accélération du point A.

Enfin, au lieu d'avoir un simple mouvement rectiligne et uniforme, le point A peut avoir un mouvement quelconque dans le plan mobile.

Dans ce cas, l'extrémité de la composante Au, qui représente la vitesse du point A relativement au plan mobile, est animée de deux vitesses : 1° celle due à la rotation qui est perpendiculaire à la composante Au et égale à $u.\omega$; 2° celle qui représente l'accélération du point A relativement au plan mobile. Il faut donc joindre cette dernière accélération aux autres composantes de l'accélération du point A.

En résumé, si un point A se meut d'une manière quelconque dans un plan mobile, tandis que ce plan

FIG. 8.



tourne autour d'un de ses points, O, avec la vitesse angulaire ω, et que le point O se meut d'une manière quelconque avec la vitesse Oq;

La vitesse absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse Au du point A par rapport au plan mobile;

Deuxièmement, la vitesse d'entraînement : cette vitesse est elle-même la résultante 1° d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse Oq du point O, 2° d'une vitesse Ai perpendiculaire au rayon OA et égale à $OA.\omega$.

L'accélération absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, l'accélération relative, c'est-à-dire l'accélération du point A par rapport au plan mobile;

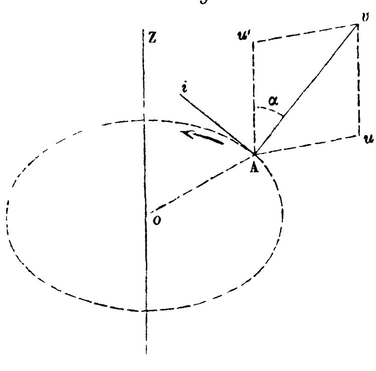
Deuxièmement, l'accélération d'entraînement : cette accélération est elle-même la résultante de deux composantes : 1° une composante égale et parallèle à l'accélération du point O, 2° l'accélération centripète du point A, dirigée suivant AO et égale à $AO.\omega^2$;

Troisièmement, l'accélération centripète composée : cette accélération est égale au double produit $2u.\omega$ de la vitesse relative u par la vitesse angulaire ω; elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse relative u, et dans le sens du mouvement de rotation de la composante Au.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à considérer le mouvement dans un plan; il est facile d'étendre les démonstrations au mouvement dans l'espace.

Supposons que le point A se meuve en ligne droite, suivant une direction quelconque $A\nu$ et avec une vitesse constante ν, par rapport à un système mobile tournant autour de l'axe fixe OZ, avec la vitesse angulaire constante ω.

Fig. 9.



Du point A, abaissons sur l'axe OZ la perpendiculaire $AO = r$.

En vertu de la rotation, le point A est animé d'une vitesse

$$Ai = r.\omega$$

perpendiculaire à la fois à l'axe OZ et au rayon OA.

La vitesse absolue du point A est la résultante des deux vitesses Av et Ai.

L'accélération absolue du point A est représentée par la résultante des vitesses avec lesquelles se meuvent les extrémités des deux composantes Av et Ai.

Décomposons la vitesse v suivant deux composantes, l'une Au', parallèle à l'axe OZ, l'autre Au, perpendiculaire à cet axe.

La composante Au', étant parallèle à l'axe de rotation, reste fixe et invariable par rapport au système mené par le point A; donc la vitesse de l'extrémité de Au' est nulle.

Il ne reste donc que les vitesses des extrémités des deux composantes Au et Ai. Nous avons vu que ces deux vitesses donnent :

1° L'accélération centripète,

$$r.\omega^2,$$

dirigée suivant le rayon;

2° L'accélération centripète composée,

$$2.u.\omega,$$

perpendiculaire à la composante Au et située dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation OZ.

En appelant α l'angle que la direction de la vitesse relative v fait avec l'axe OZ, nous aurons

$$u = v.\sin\alpha.$$

Donc, l'accélération centripète composée est égale à

$$2.\omega.v.\sin\alpha;$$

elle est perpendiculaire à la fois à la vitesse relative et à l'axe de rotation ; enfin, elle est dirigée dans le sens déterminé par la rotation de la composante Av.

On démontrerait, comme on l'a fait pour le mouvement dans un plan, que, si le point A se meut d'une manière quelconque par rapport au système mobile, il suffit de joindre aux composantes précédentes l'accélération du point relativement au système mobile.

Si l'axe OZ se meut en restant constamment parallèle à lui-même, tous les points de cet axe ayant à chaque instant des accélérations égales et parallèles, il suffit de joindre l'accélération d'un des points de l'axe de rotation.

En résumé, si un point A se meut d'une manière quelconque par rapport à un système mobile, tandis que ce système tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe qui se meut en restant constamment parallèle à lui-même,

La vitesse absolue du point A est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement;

L'accélération absolue du point A est la résultante de :

Premièrement, l'accélération relative;

Deuxièmement, l'accélération d'entraînement;

Troisièmement, l'accélération centripète composée

$$2.\omega.v.\sin\alpha,$$

perpendiculaire à l'axe de rotation et à la vitesse relative,

Dirigée dans le sens de la rotation de la droite Au qui représente la composante de la vitesse relative estimée perpendiculairement à l'axe de rotation.

Il ne reste plus à examiner que le cas où le système mobile tourne autour d'un point; mais, pour cela, il faut commencer par rappeler les lois du mouvement de rotation et la composition des vitesses angulaires. Le cas où l'axe de rotation reste constamment parallèle à lui-même suffit pour se rendre compte du mouvement apparent des corps à la surface de la terre.

Accélération centrifuge composée.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé l'accélération absolue en supposant l'accélération relative connue. Il est facile d'en déduire la solution du problème inverse, c'est-à-dire de déterminer l'accélération relative au moyen de l'accélération absolue.

Nous avons vu que lorsque le système mobile tourne autour d'un axe fixe, l'accélération absolue est la résultante :

1° De l'accélération relative ;

2° De l'accélération centripète ;

3° De l'accélération centripète composée.

Par conséquent, l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération centripète prise en signe contraire, et enfin de l'accélération centripète composée prise en signe contraire. Or, l'accélération centripète prise en signe contraire n'est autre chose que l'accélération centrifuge ; de même, l'accélération centripète composée prise en signe contraire est l'accélération centrifuge composée. Nous pouvons donc conclure que l'accélération relative est la résultante :

1° De l'accélération absolue ;

2° De l'accélération centrifuge ;

3° De l'accélération centrifuge composée.