

V.-A. LE BESGUE

**Note sur le lieu des foyers des sections
centrales des surfaces du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 5
(1866), p. 444-449

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_444_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LE LIEU DES FOYERS DES SECTIONS CENTRALES
DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ ;**

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

Pour simplifier le calcul, on suppose que les axes des coordonnées sont aussi les axes principaux de la surface qui a pour équation

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 ;$$

ou représente par

$$(2) \quad mx + ny + pz = 0$$

le plan de la section, et par

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

le carré d'un demi-diamètre de la section. En exprimant que r prend sa valeur maximum ou minimum au moyen des équations

$$x \, dx + y \, dy + z \, dz = 0,$$

$$m \, dx + n \, dy + p \, dz = 0,$$

$$A x \, dx + B y \, dy + C z \, dz = 0,$$

on a, en éliminant les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, l'équation

$$m(B - C)yz + n(C - A)zx + p(A - B)xy = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad m\alpha yz + n\beta zx + p\gamma xy = 0,$$

en posant, pour abrégier :

$$B - C = \alpha, \quad C - A = \beta, \quad A - B = \gamma.$$

Ces équations donnent immédiatement

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0, & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= -2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \\ \alpha A + \beta B + \gamma C &= 0, \\ \alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 &= -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),\end{aligned}$$

résultats qui serviront bientôt.

Les équations (1), (2), (4) donneront x, y, z ; puis (3) donnera r . Mais le calcul de r peut se faire plus directement comme il suit.

Les équations (2) et (4) donnent

$$(5) \quad \frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \lambda,$$

et, en mettant pour α, β, γ leurs valeurs, conduisent à

$$\lambda x = \frac{m}{1 - Ar^2}, \quad \lambda y = \frac{n}{1 - Br^2}, \quad \lambda z = \frac{p}{1 - Cr^2}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\lambda^2 r^2 &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2, \\ \lambda^2 r^2 &= Ar^2 \lambda^2 x^2 + Br^2 \lambda^2 y^2 + Cr^2 \lambda^2 z^2,\end{aligned}$$

d'où l'on tire par la soustraction

$$(1 - Ar^2) \lambda^2 x^2 + (1 - Br^2) \lambda^2 y^2 + (1 - Cr^2) \lambda^2 z^2 = 0;$$

puis, mettant pour $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ leurs valeurs, il en résulte

$$\frac{m^2}{1 - Ar^2} + \frac{n^2}{1 - Br^2} + \frac{p^2}{1 - Cr^2} = 0,$$

et par conséquent l'équation

$$\begin{aligned} & (BCm^2 + CA n^2 + ABp^2) r^4 \\ & - [(B + C) m^2 + (C + A) n^2 + (A + B) p^2] r^2 \\ & + (m^2 + n^2 + p^2) = 0,\end{aligned}$$

ou, pour abrégér,

$$(6) \quad Lr^2 - Mr^2 + N = 0.$$

Les deux valeurs de r^2 étant

$$\frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L},$$

la différence

$$\frac{\sqrt{M^2 - 4LN}}{L} = \rho^2,$$

prise en valeur absolue, sera le carré de la distance du centre à un des foyers.

Le carré ρ^2 peut s'exprimer comme il suit en fonction des coordonnées du foyer. On remarquera que les équations (2), (4) étant homogènes, on peut y remplacer les quantités x, y, z par des quantités proportionnelles. Ainsi, aux coordonnées des sommets on peut substituer celles des foyers, et l'on aura, ces coordonnées étant $x, y, z,$

$$\frac{m}{x(\beta z^2 - \gamma y^2)} = \frac{n}{y(\gamma x^2 - \alpha z^2)} = \frac{p}{z(\alpha y^2 - \beta x^2)} = \mu,$$

ou bien encore

$$m = \mu x(\beta z^2 - \gamma y^2), \quad n = \mu y(\gamma x^2 - \alpha z^2), \\ p = \mu z(\alpha y^2 - \beta x^2),$$

ou, pour abrégér,

$$m = \mu xX, \quad n = \mu yY, \quad p = \mu zZ.$$

Substituant dans la valeur de

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{M^2 - 4LN}}{L},$$

on aura d'abord

$$\frac{L}{\mu^2} = BCx^2X^2 + CAy^2Y^2 + ABz^2Z^2,$$

et en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs, et simplifiant au moyen de l'équation

$$\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 + \gamma^2 C^2 = -2(\alpha\beta AB + \beta\gamma BC + \gamma\alpha CA),$$

il viendra

$$\frac{L}{\mu^2} = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2).$$

Le calcul de $\frac{1}{\mu^2} \sqrt{M^2 - 4LN}$ est plus compliqué. On a d'abord, réduction faite,

$$\begin{aligned} M^2 - 4LN &= \alpha^2 m^4 + \beta^2 n^4 + \gamma^2 p^4 - 2\beta\gamma n^2 p^2 \\ &\quad - 2\gamma\alpha p^2 m^2 - 2\alpha\beta m^2 n^2, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant m, n, p par leurs valeurs, celle de

$\frac{1}{\mu^2} \sqrt{M^2 - 4LN}$ devient

$$\sqrt{\alpha^2 x^4 X^4 + \beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2\beta\gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2 - 2\gamma\alpha z^2 x^2 Z^2 X^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 X^2 Y^2},$$

ou bien encore

$$\sqrt{(\beta z^2 - \gamma x^2)^2 (\gamma x^2 - \alpha z^2)^2 (\alpha y^2 - \beta x^2)^2} = \sqrt{X^2 Y^2 Z^2} = \pm XYZ.$$

Ce résultat, qui ne suppose pas la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

s'établit comme il suit : on met la quantité radicale sous la forme

$$(\alpha^2 x^4 X^2 - 2\alpha\gamma x^2 z^2 Z^2 - 2\alpha\beta x^2 y^2 Y^2) X^2 + (\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2,$$

et comme on a

$$\begin{aligned} &\beta y^2 (\gamma x^2 - \alpha z^2)^2 - \gamma z^2 (\alpha y^2 - \beta x^2)^2 \\ &= \beta y^2 (\gamma^2 x^4 + \alpha^2 z^4) - \gamma z^2 (\alpha^2 y^4 + \beta^2 x^4) \\ &= (\beta z^2 - \gamma y^2) (\alpha^2 y^2 z^2 - \beta \gamma x^4) \\ &= X (\alpha^2 y^2 z^2 - \beta \gamma x^4), \end{aligned}$$

la quantité sous le radical est donc divisible par X^2 . On prouve de même qu'elle est divisible par Y^2 et par Z^2 , d'où il suit que $X^2 Y^2 Z^2$ est diviseur de la quantité radicale. Comme cette quantité est du douzième degré en x, y, z aussi bien que le produit $X^2 Y^2 Z^2$, il suffit d'ordonner pour trouver le quotient.

Dans la quantité radicale, la plus haute puissance de x se trouve dans les termes

$$\beta^2 y^4 Y^4 + \gamma^2 z^4 Z^4 - 2 \beta \gamma y^2 z^2 Y^2 Z^2,$$

ou

$$(\beta y^2 Y^2 - \gamma z^2 Z^2)^2 = [X(\alpha^2 y^2 z^2 - \beta \gamma x^4)]^2.$$

C'est donc $\beta^2 \gamma^2 X^2 \cdot x^8$ qui est le premier terme de la quantité radicale ordonnée par rapport à x .

Dans le produit $X^2 Y^2 Z^2$ ou $X^2(\gamma x^2 - \alpha z^2)^2(\alpha y^2 - \beta x^2)^2$, le terme en x^8 est aussi $\beta^2 \gamma^2 X^2 \cdot x^8$. Le quotient est donc l'unité.

On aura donc

$$(a) \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2)(A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2) \\ = \pm (\beta z^2 - \gamma y^2)(\gamma x^2 - \alpha z^2)(\alpha y^2 - \beta x^2). \end{cases}$$

Cette équation ne diffère de celle donnée par M. Painvin (*Nouvelles Annales*, p. 490, 1864) que par le double signe du second membre. Pour le voir, il suffit de

remplacer A, B, C par $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$; alors α, β, γ deviennent

$$\frac{c^2 - b^2}{b^2 c^2}, \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}, \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2},$$

$$\beta z^2 - \gamma y^2 = \frac{1}{a^2} \left[(a^2 - b^2) \frac{y^2}{b^2} + (a^2 - c^2) \frac{z^2}{c^2} \right],$$

$$\gamma x^2 - \alpha z^2 = \frac{1}{b^2} \left[(b^2 - c^2) \frac{x^2}{c^2} + (b^2 - a^2) \frac{z^2}{a^2} \right],$$

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = \frac{1}{c^2} \left[(c^2 - a^2) \frac{x^2}{a^2} + (c^2 - b^2) \frac{y^2}{b^2} \right];$$

puis

$$A\alpha^2 y^2 z^2 + B\beta^2 z^2 x^2 + C\gamma^2 x^2 y^2$$

devient

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left[(c^2 - b^2)^2 \frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + (a^2 - e^2)^2 \frac{z^2 x^2}{c^2 a^2} + (b^2 - a^2)^2 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} \right];$$

de sorte qu'en multipliant par $a^2 b^2 c^2$, et prenant le signe supérieur, on a précisément le résultat de M. Painvin.

Il reste à examiner s'il faut toujours prendre le signe supérieur.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que l'équation biquadratique à quatre inconnues

$$s^2 = a^2 t^4 + b^2 u^4 + c^2 v^4 - 2bcu^2 v^2 - 2act^2 v^2 - 2abt^2 u^2$$

devient une identité en posant

$$t = x(bz^2 - cy^2),$$

$$u = y(cx^2 - az^2),$$

$$v = z(ay^2 - bx^2),$$

$$s = (bz^2 - cy^2)(cx^2 - az^2)(ay^2 - bx^2).$$

On prouve de même qu'on peut prendre

$$t = x(by^2 - cz^2),$$

$$u = y(cz^2 - ax^2),$$

$$v = z(ax^2 - by^2),$$

$$s = (by^2 - cz^2)(cz^2 - ax^2)(ax^2 - by^2).$$

On trouve ainsi une infinité de solutions en nombres entiers quand a , b , c sont des entiers de signe quelconque.