

GEORGES DOSTOR

**Règle mnémonique pour obtenir les  
formules de Delambre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 5  
(1866), p. 417-420

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1866\\_2\\_5\\_417\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_417_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RÈGLE MNÉMONIQUE  
POUR OBTENIR LES FORMULES DE DELAMBRE;**

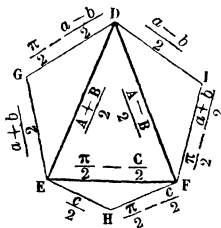
PAR M. GEORGES DOSTOR.

Néper, l'inventeur des logarithmes, a imaginé un moyen très-simple d'écrire avec certitude les relations qui existent entre les côtés et les angles du triangle sphérique rectangle. Son procédé est basé sur la construction d'un pentagone dit *pentagone de Néper*.

Les formules de Delambre sont plus compliquées que celles qui expriment les propriétés du triangle sphérique rectangle.

Cependant, par un procédé analogue à celui de Néper, on peut aussi les écrire tout de suite, sans erreur ni difficulté. Le principe de ce procédé graphique repose sur la construction d'un hexagone circonscrit à un triangle isocèle.

On construit un triangle isocèle DEF, auquel on circonscrit l'hexagone DGEHFI.



Sur les côtés DE, DF du triangle isocèle on écrit la demi-somme  $\frac{A+B}{2}$  et la demi-différence  $\frac{A-B}{2}$  des deux

angles A et B du triangle sphérique; sur la base EF on marque le complément  $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$  de la moitié du troisième angle C.

Enfin, sur la suite des côtés de l'hexagone, à partir du sommet E, dans les deux sens EDF et EHF, on écrit les arcs

$$\frac{a+b}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad \frac{a-b}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2}$$

et

$$\frac{c}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}.$$

Cela fait, voici la règle mnémorique que nous avons imaginée pour écrire les formules de Delambre.

Elle se compose des deux principes suivants :

1° *Le sinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des sinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone QUI NE SONT PAS ADJACENTS au sommet commun du triangle.*

2° *Le cosinus d'un côté du triangle isocèle est à celui de la base dans le rapport des cosinus des côtés sous-tendus dans l'hexagone QUI SONT ADJACENTS au sommet commun du triangle.*

En effet, considérons le côté  $DE = \frac{A+B}{2}$  et la base  $EF = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$  du triangle isocèle, qui ont le sommet commun E; le rapport des sinus de ce côté et de la base est

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}};$$

les côtés de l'hexagone sous-tendus par les côtés DE, EF

( 419 )

du triangle, qui ne sont pas adjacents au sommet commun E, sont

$$\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2},$$

dont les sinus ont pour rapport

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

en égalant ces deux rapports, on a la première formule de Delambre

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Si l'on compare, d'après la même règle, le côté DF =  $\frac{A-B}{2}$  du triangle isocèle à la base EF =  $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ ,

on en déduit

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

ou

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

qui est la deuxième formule de Delambre.

La deuxième règle fournit les deux autres formules

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)} = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2} \right)} ;$$

ou bien

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} .$$


---