ARMAND LÉVY

Théorème sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 380-381
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__380_0>

THÉORÈME SUR LA PARABOLE;

PAR M. ARMAND LÉVY,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Metz.

Lemme. — Si d'un point M, pris sur un des côtés AB d'un triangle ABC conjugué à une conique, on mène des tangentes à cette courbe, les points β, γ, où les tangentes rencontrent l'un des deux autres côtés BC du triangle, sont conjugués harmoniques des sommets B, C situés sur ce côté.

En effet, le sommet C étant le pôle de AB, tout point de AB est conjugué harmonique de C, par rapport aux deux points où les tangentes menées de M rencontrent la droite qui unit C au point quelconque pris sur AB (*).

THÉORÈME. — *Les droites qui unissent les milieux des côtés d'un triangle* ABC, *conjugué à une parabole, sont tangentes à cette courbe.*

En effet, la parabole est tangente à la droite de l'*infini*. Soient M le point où la droite de l'infini rencontre le côté AB, et γ le point où elle rencontre CB. La tangente menée par M sera une parallèle à AB, rencontrant BC en un point β, tel que β et γ soient conjugués harmoniques de B et de C. Mais γ étant à l'infini, β est au milieu de BC; donc le théorème est démontré (**).

(*) La polaire de M passant par le point C, les quatre droites MC, MB, Mγ, Mβ forment un faisceau harmonique dont MB, MC sont deux rayons conjugués.

(**) La tangente menée à la parabole, parallèlement à la polaire AB de C, est à égale distance de AB et de C. Le point de contact se trouve a l'intersection de la courbe et du diamètre conduit par le pôle C. C'est la

Remarque. — On en déduit le théorème démontré par M. Painvin : le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle, est le cercle des neuf points de ce triangle.

Car la parabole est tangente aux côtés du triangle dont les sommets sont aux milieux des côtés du triangle donné; donc, d'après une proposition démontrée dans les *Nouvelles Annales* (1845, p. 245), le lieu des foyers est le cercle circonscrit au second triangle, c'est-à-dire le cercle des neuf points du triangle proposé.