P. SAACKÉ

Démonstration des théorèmes de M. Grouard

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 372-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__372_1>

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. GROUARD

(voir 2e série, t. IV, p. 546);

PAR M. P. SAACKÉ,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier
(classe de M. Garlin).

1. *On donne un cercle* O *et un point* F *dans un plan: l'enveloppe d'un côté d'un angle constant dont le sommet décrit la circonférence* O, *et dont l'autre côté passe par le point* F, *est une conique à centre.*

2. *Si l'on fait varier la grandeur de cet angle, toutes les coniques que l'on obtient sont semblables et ont le point* F *pour foyer commun.*

3. *Ces coniques ont pour enveloppe le cercle donné qui les touche chacune, doublement.*

4. *Les directrices correspondantes au foyer* F *passent par un même point.*

5. *Le lieu des seconds foyers est une circonférence concentrique à la circonférence donnée.*

Démonstration. — 1. Rappelons une propriété des coniques à centre : le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer d'une conique à centre sur les tangentes à la courbe est une circonférence décrite sur l'axe focal de la conique, comme diamètre.

Inversement, si par un point F on mène un rayon vecteur FA à une circonférence donnée, et si l'on tire AB perpendiculaire à FA, la droite AB touchera constamment une section conique, ayant le point F pour foyer, et qui sera une ellipse ou une hyperbole, selon que le point F sera intérieur ou extérieur au cercle.

Cela posé, soit α l'angle constant dont le sommet A décrit la circonférence donnée O, et dont l'un des côtés passe constamment par le point donné F. Abaissons de ce point fixe F une perpendiculaire FB sur le second côté de l'angle. Le pied B de cette perpendiculaire décrit une circonférence quand le point A parcourt la circonférence donnée O. Car l'angle AFB est invariable, et le rapport $\frac{FB}{FA}$ est constamment égal à $\sin\alpha$. Il en résulte que le point B décrit une circonférence dont le centre O′ est sur une droite FO′, faisant avec FO un angle

$$OFO' = AFB = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

et à une distance de F égale à $OF \times \sin\alpha$. Le rayon R′ de cette circonférence est égal à $R\sin\alpha$, en désignant par R le rayon de la circonférence donnée O.

On voit donc que l'enveloppe des droites AB n'est autre que l'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs menés d'un point fixe F aux différents points d'une circonférence O′. D'après le théorème que nous avons rappelé, cette enveloppe est une conique à centre ayant pour foyer le point F. Ce sera une hyperbole si le point F est extérieur au cercle O′, et une ellipse si le point F est intérieur.

Selon que le point F est extérieur ou intérieur au cercle O′, ce point est extérieur ou intérieur au cercle donné O. Car les égalités

$$\mathrm{FO}' = \mathrm{FO}.\sin\alpha, \quad \text{et} \quad \mathrm{R}' = \mathrm{R}\sin\alpha$$

donnent

$$\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{FO}'}{\mathrm{R}'};$$

on a donc

$$\mathrm{FO} > \mathrm{R}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{FO} < \mathrm{R},$$

selon que FO′ est plus grand ou plus petit que R′.

Ainsi, l'enveloppe de la droite AB est une hyperbole si le point F est extérieur au cercle donné O, et une ellipse si le point F est intérieur à ce cercle.

Après avoir fait cette distinction entre les coniques, il est naturel de se demander comment s'effectue le passage de l'hyperbole à l'ellipse.

A cet égard, étudions le cas où le point F est situé sur la circonférence donnée O.

On a alors

$$\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{R}} = 1, \quad \text{et par suite} \quad \frac{\mathrm{FO}'}{\mathrm{R}'} = 1;$$

ce qui fait voir que le point F est aussi sur la circonférence O′. Les droites AB passeront toutes par le point F′ diamétralement opposé à F sur la circonférence O′. La droite BF′, pour une position particulière, se confond avec le diamètre FO′F′. Dans une autre position, elle se place en F′. On peut donc considérer la droite FF′ comme l'enveloppe des droites BF′ (*) ; et cette droite elle-même peut être regardée, soit comme une ellipse infiniment aplatie, soit comme une hyperbole infiniment allongée. Dans tous les cas, les points F, F′ sont à la fois les foyers et les sommets de cette *conique limite.* On pouvait prévoir que les foyers doivent, dans le cas où F est sur la circonférence O, coïncider avec les sommets; car on a alors

$$\frac{\text{FO}'}{\text{R}'} = 1,$$

et $\frac{\text{FO}'}{\text{R}'}$ représente l'excentricité de la conique. On voit de même que la conique enveloppe a un centre.

Remarque. — La proposition que nous venons de démontrer n'est que la réciproque de cette proposition connue : *le lieu des pieds des obliques menées de l'un des foyers d'une conique à centre sur les tangentes, et sous une inclinaison constante, est une circonférence dont le centre est un point du second axe de la conique.*

Tout ce que nous avons dit se déduit immédiatement de ce théorème.

2. *Si l'on fait varier la grandeur de l'angle* α, *toutes les coniques que l'on obtient sont semblables et ont le point* F *pour foyer commun.*

En effet, nous venons de voir que le rayon du cercle O′ est $R \sin\alpha$; de plus

$$\text{FO}' = \text{FO}.\sin\alpha = d \sin\alpha.$$

(*) On sait d'ailleurs qu'un système de deux points peut être considéré comme une conique et que dans ce cas les tangentes à la conique sont toutes les droites passant par l'un de ces points (*voir* le *Traité des Sections coniques* de M. Chasles, p. 32, n° 32).

Cette note est de M. Saacké.

On a donc, en nommant $2a$, $2b$ les axes et $2c$ la distance des foyers,

$$a = R \sin \alpha, \quad c = d \sin \alpha.$$

Ces formules montrent tout d'abord que l'excentricité $\frac{c}{a}$ est indépendante de α.

En outre, de l'égalité

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{d^2}{R^2}$$

on déduit

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{d^2 - R^2}{R^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2 - R^2}{R^2}.$$

Les axes étant proportionnels, les coniques sont semblables. Il résulte de la démonstration du théorème I qu'elles ont toutes pour foyer le point F.

3. Lorsque le point F est extérieur au cercle donné O, les coniques ont pour enveloppe la circonférence O, qui les touche chacune en deux points. Considérons l'hyperbole enveloppée par la droite AB, lorsque le sommet A de l'angle constant parcourt la circonférence O. Quel que soit l'angle α, il y a sur l'hyperbole un point D tel, qu'en ce point le rayon vecteur fait avec la tangente un angle égal à α. Ce point appartient évidemment à la circonférence donnée. Dès lors, la circonférence et l'hyperbole ont le point D commun, et comme ces deux courbes ne peuvent pas se couper, elles sont évidemment tangentes en ce point. Le même raisonnement s'appliquant aux deux branches de l'hyperbole, on voit qu'il y a deux points de contact symétriques, par rapport au second axe de la conique.

Ces coniques, extérieures au cercle, lui étant doublement tangentes, le cercle est leur enveloppe.

Remarque. — Lorsque le point F est dans l'intérieur du cercle donné, les coniques que l'on obtient en faisant varier α ne sont pas toutes doublement tangentes au cercle. Pour s'en assurer, il suffit de supposer que le point F coïncide avec le centre O du cercle donné. Car, dans ce cas, les coniques deviennent des circonférences concentriques au cercle donné. Mais, en admettant que F soit intérieur au cercle O, nous allons déterminer à partir de quelle valeur de α les ellipses enveloppes cessent d'être tangentes à la circonférence donnée.

Menons le rayon vecteur FA perpendiculaire à OF, et par le point A où il rencontre la circonférence O conduisons une tangente AB à cette circonférence. L'angle aigu FAB sera évidemment le minimum des angles que les rayons vecteurs menés de F aux différents points de la circonférence forment avec les tangentes en ces points. Il s'ensuit que les coniques correspondantes à des valeurs de l'angle α moindres que l'angle FAB ne peuvent être tangentes à la circonférence O; car, s'il y avait un point de contact, la tangente en ce point à la conique qui serait aussi tangente au cercle, ferait avec le rayon vecteur un angle α moindre que FAB, ce qui est impossible.

4. *Les directrices correspondantes au foyer* F *passent par un même point.*

Pour une valeur particulière de α, l'axe focal de la conique est dirigé suivant la droite FO′, et le second axe suivant la droite OO′ perpendiculaire à FO′ au point O′. On a

$$a = R' = R \sin\alpha, \quad c = d \sin\alpha, \quad \frac{b^2}{c} = \left(\frac{R^2 - d^2}{d}\right) \sin\alpha.$$

La directrice correspondant au foyer F est parallèle à O′O, et rencontre O′F en un point H dont la distance à F est $\left(\frac{R^2 - d^2}{d}\right)\sin\alpha$. D'où

$$\frac{HF}{FO'} = \frac{R^2 - d^2}{d^2}.$$

Soit G le point où la directrice rencontre la droite FO, les triangles semblables FHG, FO'O donnent

$$\frac{FG}{FO} = \frac{HF}{FO'} = \frac{R^2 - d^2}{d^2}.$$

Donc, lorsqu'on fait varier α, les directrices correspondant au foyer F, rencontrent, toutes, la droite FO en un même point G.

5. *Le lieu des seconds foyers est une circonférence concentrique au cercle donné* O.

En effet, si F' est le second foyer, on aura

$$O'F' = O'F, \quad \text{par suite} \quad OF' = OF,$$

puisque OO' est perpendiculaire sur FO'. Donc, le lieu des seconds foyers F' est la circonférence décrite du point O comme centre avec OF pour rayon.

Note. — La même question a éte resolue par MM. Paul Capin, elève en Mathematiques speciales au lycee de Montpellier, P. Cagny et Leon Blouet, eleves du lycee Charlemagne; Puel et A. Juncker.