NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBASTEUR

Solution de la question donnée au concours général de 1862 pour la classe de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 370-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__370_0>

SOLUTION DE LA QUESTION
donnée au concours général de 1862 pour la classe de Mathématiques spéciales;

PAR M. LEBASTEUR.

(Copie couronnee.)

On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA′ *leurs rayons vecteurs minimums; on fait tourner ces rayons vecteurs autour de* F, *en conservant leur distance angulaire; soit* FC, FC′ *une position. En* C *et* C′ *on mène les tangentes à chacune des coniques. Trouver le lieu de leur point* M *de rencontre.*

L'équation de la première conique, en prenant pour axes les parallèles aux axes de la courbe menés par le foyer F, est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2\gamma^2,$$

où

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \gamma = x + \frac{b^2}{c}.$$

Celle de la deuxième est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2\Gamma^2,$$

ε ayant la même valeur puisque les axes sont proportionnels, et

$$\Gamma = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,$$

où

$$p = k\frac{b^2}{c},$$

k étant le rapport donné de proportionnalité et α l'angle AFA'.

Les tangentes aux points C et C' auront pour équations, en appelant φ l'angle CFx,

$$(1). \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \varepsilon\gamma,$$

$$(2) \qquad x\cos(\varphi+\alpha) + y\sin(\varphi+\alpha) = \varepsilon\Gamma.$$

En éliminant φ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. A cet effet, j'écris la deuxième

$$(3) \quad (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\cos\varphi + (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\sin\varphi = \varepsilon\Gamma.$$

Des équations (1) et (3), considérées comme deux équations du premier degré entre $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, je tire les valeurs de ces inconnues

$$(4) \qquad \sin\varphi = \varepsilon\,\frac{\gamma(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \Gamma x}{(x^2+y^2)\sin\alpha},$$

$$(5) \qquad \cos\varphi = \varepsilon\,\frac{\gamma(y\cos\alpha - x\sin\alpha) - \Gamma y}{(x^2+y^2)\sin\alpha},$$

et faisant la somme des carrés de (4) et (5), on a

$$(6) \qquad \Gamma^2 + \gamma^2 - 2\Gamma\gamma\cos\alpha = (x^2+y^2)\,\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon^2}.$$

L'équation (6) est sous une forme très-remarquable l'équation d'un cercle. En remplaçant Γ, γ par leurs valeurs, cette équation devient

$$\frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha(x^2+y^2) - 2\frac{b^2}{c}(1+\cos^2\alpha - 2k\cos\alpha)x$$
$$- 2\frac{b^2}{c}\sin\alpha(1-\cos\alpha)y - \frac{b^4}{c^2}(1+k^2-2k\cos\alpha) = 0.$$

Mais il n'est nul besoin de faire cette substitution. Il suffit qu'il demeure acquis que le lieu est un cercle, et la Géométrie termine très-élégamment la question.

L'équation (6) nous fournira seulement un dernier résultat.

Si l'on cherche, en effet, la position du cercle qu'elle représente relativement aux deux coniques données, on reconnaît tout de suite qu'il est doublement tangent à chaque conique.

Donc le centre du cercle se trouve sur chacun de leurs petits axes et par suite à leur intersection.

En outre, dans la position primitive des rayons vecteurs minimums, et après une rotation de 180 degrés, il est clair que nous avons les deux points des extrémités du diamètre du cercle; donc ce cercle est complétement défini.