Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 361-369
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__361_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 755;

PAR M. H. MOREAU,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon
(classe de M. Chevilliet.)

Soient F, F', *les foyers d'une ellipse de Cassini,* C *son centre,* P *un point quelconque pris sur la courbe. La normale en* P *fera avec l'un des rayons vecteurs* PF *un angle égal à celui que la droite* PC, *menée au centre, fait avec l'autre rayon vecteur* PF'.

Démonstration analytique. — Soient x, y, les coordonnées du point P, α l'angle CPF', α' l'angle FPN que la normale PN forme avec le rayon vecteur PF.

On aura

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x+c}}{1 + \dfrac{y^2}{x(x+c)}} = \frac{yc}{x(x+c)+y^2}.$$

Cherchons maintenant la valeur de $\operatorname{tang}\alpha'$.

Le coefficient angulaire y' de la normale au point P est donné par l'équation

$$y' = \frac{y(x^2+y^2+c^2)}{x(x^2+y^2-c^2)};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\dfrac{y}{x-c} - \dfrac{y(x^2+y^2+c^2)}{x(x^2+y^2-c^2)}}{1 + \dfrac{y^2(x^2+y^2+c^2)}{x(x-c)(x^2+y^2-c^2)}}$$

$$= \frac{cy[(x-c)^2+y^2]}{(x^2+y^2)[(y^2+x^2-cx)+c^2(y^2+cx-x^2)]}.$$

Mais,

$$(x^2+y^2)(y^2+x^2-cx) = (x^2+y^2)[y^2+(x-c)^2] \\ -c^2(x^2+y^2)+cx(x^2+y^2);$$

d'autre part,

$$c^2(y^2+cx-x^2) = +c^2(x^2+y^2)+cx(c^2-2cx);$$

donc,

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{cy[(x-c)^2+y^2]}{(x^2+y^2+cx)[y^2+(x-c)^2]} = \frac{cy}{x(x+c)+y^2} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Il s'ensuit $\alpha' = \alpha$. Ce qu'il fallait démontrer.

Note.— Des démonstrations semblables à la précédente ont été données par MM. Charles Ribeaucourt, du lycée de Lille; Venceslas Niébylowski, du lycée Bonaparte; Alphonse Tubrun, du lycée de Strasbourg; P. Marques Braga, du lycée Saint-Louis.

Autre solution de la même question;

Par M. MARQUES BRAGA,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Soit P′ un point voisin du point P, sur la courbe. Décrivons de F comme centre, avec FP′ pour rayon, un arc rencontrant le rayon vecteur FP, en R (*). Décrivons, de même, de F′ comme centre, avec F′P′ pour rayon, un arc de cercle coupant F′P, en K.

Lorsque P′ est infiniment voisin de P, les triangles PRP′, PKP′ sont rectangles en R et en K, car les arcs de cercle P′R, P′K se confondent alors avec leurs tangentes.

Nous avons donc

$$\mathrm{PR} = \mathrm{PP'}\cos(\mathrm{P'PR}) \quad \text{et} \quad \mathrm{PK} = \mathrm{PP'}\cos(\mathrm{P'PF'}).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si nous appelons r, r', les distances FP, F'P, les accroissements PR, PK seront Δr, $-\Delta r'$. A la limite, PP' devient tangente au point P, et en désignant par ω, ω' les angles P'PR, P'PF', on aura

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = -\frac{dr}{dr'},$$

ou, parce que $rr' =$ const.,

$$\frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \frac{r}{r'}.$$

La droite PC étant la médiane du triangle FPF', on a :

$$\frac{\sin \mathrm{F'PC}}{\sin \mathrm{FPC}} = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FP'}} = \frac{r}{r'}.$$

D'où

$$\frac{\sin \mathrm{F'PC}}{\sin \mathrm{FPC}} = \frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega'\right)}.$$

Mais il est évident que

$$\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \omega'\right) = \mathrm{F'PC} + \mathrm{FPC}.$$

D'où

$$\mathrm{F'PC} = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

et

$$\mathrm{FPC} = \left(\frac{\pi}{2} - \omega'\right). \quad \text{C. Q. F. D. (*)}.$$

(*) En général, si $f(r, r') = 0$ représente l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées bipolaires, et f'_r, $f'_{r'}$ les dérivées de $f(r, r')$ par rapport à r et à r', pour construire la normale en un point P de la courbe, il suffira de prendre sur les rayons vecteurs PF, PF' dans le sens de ces

Note — M. Martel, eleve du lycee Saint-Louis, resout la question de la même maniere.

M. J Gazeres deduit de l'equation $rr' = \text{const.}$.

$$(r+dr)(r'+dr') = rr',\quad r\,dr' + r'\,dr + dr\,dr' = 0,\quad \frac{dr}{dr'} = -\frac{r}{r'}$$

Cette derniere relation le conduit a une construction tres-simple de la tangente, et par suite au theoreme enonce.

M E. Muzeau, lieutenant d'artillerie, construit d'abord la tangente au point P, en suivant la methode de Roberval, cette construction met en evidence la propriete de la normale.

Question 756,

PAR M. EM. C.,

Soient F, F′ *deux points fixes sur une surface sphérique, et considérons la courbe, lieu du point* P *tel, que* $\tang \frac{1}{2}\,\mathrm{PF} \cdot \tang \frac{1}{2}\,\mathrm{PF'} = \text{const.}$ *Le grand cercle normal en* P *à cette courbe fera avec* FP *un angle égal à celui que fait avec* F′P *le grand cercle passant par* P *et le milieu de l'arc* FF′.

Je désigne par ρ et ρ' les arcs PF, PF′. Soit M le milieu de l'arc FF′; soient β et β' les angles de PM avec PF et PF′.

Dans le triangle sphérique PMF, on a

$$\frac{\sin\beta}{\sin \mathrm{MF}} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{PMF}}}{\sin\rho}.$$

---

rayons (si les derivees de f'_r, $f'_{r'}$ sont positives), des distances PA, PB, proportionnelles a f'_r, $f'_{r'}$ et de mener la mediane PM du triangle PAB. Dans le cas actuel, $f'_r = r' = \mathrm{PF'}$ et $f'_{r'} = r = \mathrm{PF}$. Les triangles PAB, PF′F sont, par consequent, semblables, et il est alors evident que l'angle MPF est egal a l angle CPF′, puisque PC est la mediane du triangle PF′F. G.

De même dans le triangle sphérique PMF′, on a

$$\frac{\sin\beta'}{\sin \mathrm{MF}} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{PMF}}}{\sin\rho'}.$$

D'où

(1) $$\frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\rho}{\sin\rho'}.$$

Soit, maintenant, p un point infiniment voisin de P sur l'arc de grand cercle tangent en P; soient α et α' les angles que font PF et PF′ avec l'arc de grand cercle normal.

On trouve sans peine

$$\sin\alpha = \frac{\pm d\rho}{ds}, \quad \sin\alpha' = \frac{\pm d\rho'}{ds};$$

(2) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \pm\frac{d\rho}{d\rho'};$$

le double signe étant mis, afin que les sinus et par suite leur rapport soient toujours positifs.

Mais de l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho \times \operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho' = \text{const.},$$

on tire, en différentiant,

$$\frac{d\rho \operatorname{tang}\frac{\rho'}{2}}{\cos^2\frac{\rho}{2}} + \frac{d\rho' \operatorname{tang}\frac{\rho}{2}}{\cos^2\frac{\rho'}{2}} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{\sin\rho} + \frac{d\rho'}{\sin\rho'} = 0.$$

A cause de (2), cette dernière égalité donne

(3) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\rho}{\sin\rho'}.$$

Or,

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta';$$

donc de (1) et (3), il suit que l'on a

$$\alpha = \beta'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Muzeau, Gazères et Moreau, élève du lycée de Besançon.

Question 749;

PAR MM. CAMILLE MASSING ET H. KAENTZ,
Élèves de l'École Centrale.

$My^2 + Nx^2 - 1 = 0$, *étant l'équation d'une conique*, α, 6, γ *représentant les angles faits avec l'axe des* x *par les côtés d'un triangle* ABC, *inscrit dans la conique, et* x_0, y_0, r *représentant les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a les relations suivantes :*

$$\sin\alpha \sin 6 \sin\gamma = \frac{Nx_0}{r(M-N)},$$

$$\cos\alpha \cos 6 \cos\gamma = \frac{My_0}{r(M-N)},$$

$$M[y_0 - r\cos(\alpha + 6 + \gamma)]^2 + N[x_0 - r\sin(\alpha + 6 + \gamma)]^2 - 1 = 0 \quad (*).$$

Démonstration. — En désignant par x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des sommets A, B, C, nous avons les relations

$$\frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\sin\alpha},$$

$$My_1^2 + Nx_1^2 - 1 = 0,$$

$$My_2^2 + Nx_2^2 - 1 = 0;$$

(*) Nous rectifions, dans ces formules, deux fautes qui nous ont été indiquées par MM. Massing et Kaentz et par M. Melon.

d'où nous tirons

(1) $$M(y_1+y_2)\sin\alpha + N(x_1+x_2)\cos\alpha = 0.$$

Les coordonnées x_0, y_0 du centre du cercle circonscrit au triangle, vérifiant l'équation de la perpendiculaire élevée au milieu du côté AB, nous avons

(2) $$(y_1+y_2)\sin\alpha + (x_1+x_2)\cos\alpha = 2(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha).$$

Les relations (1), (2) donnent

$$x_1+x_2 = \frac{2M}{M-N}\left(x_0 + y_0\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

$$y_1+y_2 = -\frac{2N}{M-N}\left(y_0 + x_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

On aura de même

$$x_2+x_3 = \frac{2M}{M-N}\left(x_0 + y_0\frac{\sin 6}{\cos 6}\right),$$

$$y_2+y_3 = -\frac{2N}{M-N}\left(y_0 + x_0\frac{\cos 6}{\sin 6}\right).$$

D'où

$$x_3-x_1 = \frac{2M}{M-N}y_0\frac{\sin(6-\alpha)}{\cos\alpha\cos 6},$$

$$y_3-y_1 = \frac{2N}{M-N}x_0\frac{\sin(6-\alpha)}{\sin\alpha\sin 6}.$$

Mais

$$\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma} = 2r\sin(6-\alpha) \text{ (*)},$$

(*) $\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma}$ représente la valeur du côté AC; d'ailleurs

$$\sin(6-\alpha) = \sin B:$$

l'égalité

$$\frac{x_3-x_1}{\cos\gamma} = 2r.\sin(6-\alpha),$$

revient donc à

$$AC = 2r.\sin B,$$

formule bien connue.

et

$$\frac{y_3 - y_1}{\sin\gamma} = 2r\sin(6 - \alpha);$$

en égalant ces dernières valeurs de $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$ à celles que nous avons précédemment obtenues, il vient

$$\cos\alpha \cos 6 \cos\gamma = \frac{My_0}{r(M-N)},$$

et

$$\sin\alpha \sin 6 \sin\gamma = \frac{N x_0}{r(M-N)}.$$

Ce sont les deux premières relations qu'il fallait démontrer.

Actuellement, cherchons les coordonnées du quatrième point d'intersection de la conique $My^2 + Nx^2 - 1 = 0$, et du cercle circonscrit au triangle ABC (les trois autres points d'intersection étant les sommets A, B, C du triangle).

En éliminant x entre les équations

$$My^2 + Nx^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

nous trouvons une équation du quatrième degré, dans laquelle la somme des quatre racines y_1, y_2, y_3, y_4 est donnée par la relation

$$(3) \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{4Ny_0}{N-M}.$$

Or, d'après les égalités déjà obtenues, on a :

$$y_1 + y_2 = + \frac{2N}{N-M}\left(y_0 + x_0 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

$$y_2 + y_3 = + \frac{2N}{N-M}\left(y_0 + x_0 \frac{\cos 6}{\sin 6}\right),$$

$$y_3 + y_1 = + \frac{2N}{N-M}\left(y_0 + x_0 \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right);$$

d'où

$$(4)\ y_1+y_2+y_3=\frac{3Ny_0}{N-M}+\frac{N}{N-M}x_0\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

En retranchant l'équation (4) de l'équation (3), on a

$$(5)\qquad y_4=\frac{Ny_0}{N-M}-\frac{N}{N-M}x_0\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

Or,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$

et

$$\frac{N}{N-M}x_0=-r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{My_0}{r(M-N)}.$$

Au moyen de ces dernières relations, l'équation (5) devient

$$y_4=\frac{Ny_0}{N-M}-\frac{My_0}{N-M}-r\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=y_0-r\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

Un calcul semblable donne

$$x_4=x_0-r\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Donc

$$M[y_0-r\cos(\alpha+\beta+\gamma)]^2+N[x_0-r\sin(\alpha+\beta+\gamma)]^2-1=0.$$

Ce qui démontre la troisième relation.

Note. — La même question a été résolue par M. Melon, et par M. Camille Laduron, élève à l'École des Mines de Liége.