Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 35-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__35_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 429 *et* 430

(voir t. XVII, p. 139);

PAR M. BAUQUENNE,
Candidat à l'École Normale.

Par le centre d'un polygone sphérique régulier, on fait passer une circonférence de grand cercle, et l'on projette sur cette circonférence tous les arcs menés du centre aux divers sommets; comment varie la somme des puissances n des tangentes des projections quand varie la direction du grand cercle? Question analogue pour un polygone régulier dans un plan. (VANNSON.)

Soient O le centre d'un polygone, A un quelconque de ses sommets, A' la projection de ce sommet sur l'arc de grand cercle considéré. En désignant par r le rayon polaire du polygone, le triangle sphérique rectangle AOA' donne

$$\operatorname{tang} OA' = \operatorname{tang} r \cos AOA'.$$

Si N est le nombre des côtés du polygone, $\frac{2\pi}{N}$ est l'angle au pôle. Appelons α l'angle caractéristique du grand cercle choisi, et k un nombre entier inférieur à N, on aura

$$AOA' = \alpha + k\frac{2\pi}{N}$$

et

$$\operatorname{tang} OA' = \operatorname{tang} r \cos\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).$$

En désignant par S_n la somme cherchée,

$$S_n = \tan^n r \sum_{k=0}^{k=N-1} \cos^n \left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).$$

On a, d'après une formule connue, si n est pair,

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}\cos^n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) \\
&= \cos n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{n}{1}\cos(n-2)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et si n est impair,

$$\begin{aligned}
&2^{n-1}\cos^n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) \\
&= \cos n\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{n}{1}\cos(n-2)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right).
\end{aligned}$$

Tout revient donc à former des sommes telles que

$$\sum_{k=0}^{k=N-1} \cos m\left(\alpha + k\frac{2\pi}{N}\right),$$

m étant un nombre entier quelconque. Les arcs considérés étant en progression arithmétique, il suffit d'appliquer une formule connue, et l'on trouve que le numérateur est nul sans que le dénominateur le soit, toutes les fois que $\frac{m}{N}$ n'est pas entier, ce qui arrive en particulier si m est inférieur à N. La plus grande valeur de m étant n, la somme précédente sera nulle si le degré de la puissance est inférieur au nombre des côtés du polygone.

Donc, si n est impair,

$$S_n = 0,$$

et si n est pair et égal à $2p$,

$$S_{2p} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots 2p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{N \tang^{2p} r}{2^{2p}}.$$

Cette somme est donc constante.

Si l'on avait considéré le polygone dans un plan, on aurait eu

$$OA' = r \cos AOA',$$

et une suite de calculs identiques.

Dans le cas où $p = 1$, la dernière formule se simplifie et donne

$$S_2 = \frac{N}{2} \tang^2 r.$$

C'est la question 429.

Question 590

(voir tome XX, page 141);

PAR M. A. S.

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque *inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante.* (Faure.)

Prenons le premier triangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c pour triangle de référence; une conique quelconque inscrite dans ce triangle aura pour équation

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\alpha\beta = 0.$$

La polaire, par rapport à cette conique, d'un point quelconque α', β', γ' a pour équation

$$\begin{aligned}(l\alpha - m\beta - n\gamma)\, l\alpha' + (m\beta - n\gamma - l\alpha)\, m\beta' \\ + (n\gamma - l\alpha - m\beta)\, n\gamma' = 0.\end{aligned}$$

Les coordonnées du premier point milieu sont

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = \frac{a \sin C}{2}, \quad \gamma' = \frac{a \sin B}{2};$$

celles du second,

$$\beta' = 0, \quad \gamma' = \frac{b \sin A}{2}, \quad \alpha' = \frac{b \sin C}{2};$$

et celles du troisième,

$$\gamma' = 0, \quad \alpha' = \frac{c \sin B}{2}, \quad \beta' = \frac{c \sin A}{2}.$$

En portant ces différentes valeurs dans l'équation générale de la polaire, on obtient

$$(1)\quad (mc + nb)\, l\alpha - (mc - nb)\, m\beta + (mc - nb)\, n\gamma = 0,$$

$$(2)\quad (lc - na)\, l\alpha - (lc + na)\, m\beta - (lc - na)\, n\gamma = 0,$$

$$(3)\quad (lb - ma)\, l\alpha - (lb - ma)\, m\beta - (lb + ma)\, n\gamma = 0.$$

Les distances des trois sommets du triangle de référence à la droite (1) sont (t. XX, p. 224)

$$l\,\frac{mc+nb}{a},\qquad -m\,\frac{mc-nb}{b},\qquad n\,\frac{mc-nb}{c};$$

à la droite (2),

$$l\,\frac{lb-ma}{a},\qquad -m\,\frac{lb-ma}{b},\qquad -n\,\frac{lb+ma}{c};$$

et à la droite (3),

$$l\,\frac{lc-na}{a},\qquad -m\,\frac{lc+na}{b},\qquad -n\,\frac{lc-na}{c}.$$

S étant l'aire du triangle de référence, S' celle du triangle formé par les droites (1), (2) et (3), on a (*voir* endroit cité)

$$S'=S\,\frac{P^2}{P_1P_2P_3},$$

en posant, conformément à une notation connue,

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lc-na & lc+na & lc-na \\ lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ mc+nb & mc-nb & -mc+nb \end{vmatrix}=P,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ mc+nb & mc-nb & -mc+nb \\ \frac{a}{l} & -\frac{b}{m} & -\frac{c}{n} \end{vmatrix}=P_1,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} mc+nb & mc-nb & -mc+nb \\ lc-na & lc+na & lc-na \\ \frac{a}{l} & -\frac{b}{m} & -\frac{c}{n} \end{vmatrix}=P_2,$$

$$\frac{lmn}{abc}\begin{vmatrix} lc-na & lc+na & lc-na \\ lb-ma & lb-ma & lb+ma \\ \frac{a}{l} & -\frac{b}{m} & -\frac{c}{n} \end{vmatrix}=P_3.$$

Ces quatre déterminants se réduisent facilement à

$$P = 8l^2m^2n^2, \quad P_1 = 4l^2mn, \quad P_2 = 4lm^2n, \quad P_3 = 4lmn^2;$$

on en déduit, en portant dans la formule ci-dessus,

$$S' = S,$$

ce qui démontre le théorème et donne la valeur de la constante

---

Question 649

(voir 2e série, t. II, p. 189);

PAR M. CHARLES CAYLA,
Maître d'etudes au collége Rollin.

On donne une surface conique du second degré sur laquelle on peut placer un trièdre trirectangle; on sait qu'on peut alors en placer une infinité; par les trois arêtes de l'un de ces trièdres, on mène des plans normaux à cette surface; ces trois plans se coupent suivant une même droite, dont on demande le lieu, lorsqu'on déplace le trièdre sur la surface conique. (MANNHEIM.)

Je suppose d'abord la surface conique rapportée à l'un des trièdres trirectangles que l'on peut placer sur sa surface. Son équation sera

$$By'z' + B'z'x' + B''x'y' = 0.$$

Le plan tangent à la surface suivant l'axe des x a pour équation

$$\frac{y'}{B'} + \frac{z'}{B''} = 0.$$

L'équation du plan normal correspondant est

$$B'y' - B''z' = 0.$$

Par symétrie, on aura pour les équations des deux autres plans normaux

$$B''z' - Bx' = 0,$$
$$Bx' - B'y' = 0.$$

Ces trois plans normaux passent par la droite

$$Bx' = B'y' = B''z'.$$

Rapportons maintenant la surface à ses axes. Son équation prendra la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0.$$

On a pour tous les points de l'espace les relations connues

$$By'z' + B'z'x' + B''x'y' = Sx^2 + S'y^2 + S''z^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Or nous pouvons écrire les équations de la droite

$$\frac{x'}{\frac{1}{B}} = \frac{y'}{\frac{1}{B'}} = \frac{z'}{\frac{1}{B''}} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B''^2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{By'z' + B'z'x' + B''x'y'}}{\sqrt{\frac{B}{B'B''} + \frac{B'}{B''B} + \frac{B''}{BB'}}}.$$

Élevant au carré les deux derniers rapports et tenant compte des relations précédentes, on a l'équation du lieu

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{B'^2B''^2 + B''^2B'^2 + B^2B''^2} = \frac{Sx^2 + S'y^2 + S''z^2}{BB'B''(B^2 + B'^2 + B''^2)}.$$

Posant

$$\frac{BB'B''(B^2 + B'^2 + B''^2)}{B'^2B''^2 + B''^2B'^2 + B^2B'^2} = k,$$

l'équation devient

$$(k - S)\,x^2 + (k - S')\,y^2 + (k - S'')\,z^2 = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré rapporté à ses axes.