NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SIVERING

# Note sur les équations algébriques du 3e degré

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 5 (1866), p. 356-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__356_0>

# NOTE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU 3e DEGRÉ ;

PAR M. JOSEPH SIVERING,
Ingenieur

Pour résoudre l'équation algébrique du troisième degré, on fait usage, dans certains cas, de formules trigonométriques, auxquelles on est parvenu en se basant sur les logarithmes imaginaires et sur la formule de Moivre.

En remplacement de ces procédés transcendants, nous proposons ci-après une méthode élémentaire, qui nous paraît d'une application sûre et expéditive dans tous les cas.

On démontre en algèbre que toute équation numérique de degré impair, a toujours un nombre impair de racines réelles de signe contraire à celui de son dernier terme. D'après cette proposition, l'équation $x^3+px+q=0$ aurait donc une ou trois racines de signe contraire à celui de $q$. Or, elle ne peut avoir trois racines pareilles, car l'équation est privée de son second terme, partant les racines ont leur somme égale à zéro, et ne peuvent être affectées toutes trois du même signe.

*L'équation* $x^3+px+q=0$ *a donc toujours une, et seulement une racine de signe contraire à celui de son dernier terme.*

Cette remarque est la base d'un mode de résolution simple et pratique, car elle révèle l'existence, entre zéro et $-\frac{q}{0}$, d'une racine unique qu'on pourra chercher, sans craindre d'être troublé dans les calculs par la présence simultanée de plusieurs racines voisines.

Passons à la détermination de cette racine, et dans ce but mettons l'équation sous la forme

$$x = -\frac{q}{x^2 + p}.$$

Pour que $x$ soit affectée d'un signe contraire à celui de $q$, il faut et il suffit que dans la fraction $\frac{q}{x^2 + p}$ le dénominateur soit toujours positif. En tenant compte de cette remarque dans les essais à faire, toute valeur numériquement trop petite ou trop grande, mise à la place de $x$ dans le second membre de l'égalité

$$x = -\frac{q}{x^2 + p},$$

en rendra le premier membre numériquement trop grand ou trop petit.

Ainsi attribuons à $x$ une valeur d'essai quelconque $a$, d'un signe contraire à celui de $q$ et telle encore que l'expression $a^2 + p$ reste positive, $a$ sera une première limite de la racine; une seconde limite en sens inverse sera la fraction $-\frac{q}{a^2 + p}$. En essayant ensuite une valeur intermédiaire entre les nombres $a$ et $-\frac{q}{a' + p}$, nous aurons un nouveau couple de limites, plus rapprochées. Quelques opérations pareilles conduiront de plus en plus près de la racine cherchée, et les limites voisines trouvées indiqueront à tous les instants le degré d'approximation obtenu.

La première racine trouvée, le calcul des autres racines, réelles ou imaginaires, n'est plus une difficulté. Réduisons toutefois ce calcul en une formule, pour montrer combien le degré d'approximation pourra également y être satisfaisant. En divisant $x^3+px+q$ par un facteur quelconque $x-a$, on trouve pour quotient

$$x^2+ax+a^2+p,$$

et pour reste

$$a^3+ap+q.$$

Si $a$ est une racine, le reste de la division $a^3+ap+q$ sera nul, et le quotient égalé à zéro donnera les deux autres racines.

Ainsi $a$ étant une racine de l'équation

$$x^3+px+q=0,$$

les deux autres racines seront données par

$$x^2+ax+a^2+p=0,$$

et vaudront

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{3a^2}{4}-p}.$$