NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MISTER

NEUBERG

Question d'algèbre élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 354-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__354_0>

QUESTION D'ALGEBRE ELEMENTAIRE;

PAR MM. MISTER ET NEUBERG,
Professeurs a Nivelles (Belgique).

Quelle est la condition nécessaire pour que les deux valeurs de x soient égales et de même signe dans l'équation (*)

$$(cd - g^2)x^2 - [(1 + a^2)d + (1 + b^2)c - 2abg]\sqrt{1 + a^2 + b^2} \,.\, x$$
$$+ (1 + a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport a x, la quantité sous le radical devra être égale à zéro, ce qui donne

$$[(1 + a^2)d + (1 + b^2)c - 2abg]^2 - 4(cd - g^2)(1 + a^2 + b^2) = 0.$$

Développant le carré et ordonnant par rapport a g, il vient

$$4(1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)g^2 - 4ab[(1 + a^2)d + (1 + b^2)c]g$$
$$+ [(1 + a^2)d + (1 + b^2)c]^2 - 4cd(1 + a^2 + b^2) = 0,$$

ou

$$g^2 - \frac{ab[(1 + a^2)d + (1 + b^2)c]}{(1 + a^2)(1 + b^2)}g$$
$$+ \frac{[(1 + a^2)d + (1 + b^2)c]^2 - 4cd(1 + a^2 + b^2)}{4(1 + a^2)(1 + b^2)} = 0.$$

(*) Cette equation est celle qu'on obtient lorsqu'on cherche sur une surface le point pour lequel les deux rayons de courbure principaux sont egaux.

Si l'on complète le carré commencé en g, on aura

$$\left\{g - \frac{ab[(1+a^2)d + (1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)}\right\}^2 + \frac{[(1+a^2)d + (1+b^2)c]^2 - 4cd(1+a^2+b^2)}{4(1+a^2)(1+b^2)} - \frac{a^2b^2[(1+a^2)d + (1+b^2)c]^2}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0;$$

réduisons au même dénominateur, cette égalité pourra s'écrire

$$\left\{g - \frac{ab[(1+a^2)d + (1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)}\right\}^2 + \frac{(1+a^2+b^2)\left\{[(1+a^2)d + (1+b^2)c]^2 - 4cd(1+a^2)(1+b^2)\right\}}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0,$$

ou encore

$$\left\{g - \frac{ab[(1+a^2)d + (1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)}\right\}^2 + \frac{(1+a^2+b^2)[(1+a^2)d - (1+b^2)c]^2}{4(1+a^2)^2(1+b^2)^2} = 0.$$

Cette somme de carrés ne pourra être nulle que si chaque carré est nul séparément; il faut donc que l'on ait :

$$g = \frac{ab[(1+a^2)d + (1+b^2)c]}{2(1+a^2)(1+b^2)},$$

$$(1+a^2)d = (1+b^2)c,$$

et, par suite,

$$g = \frac{abc}{1+a^2} = \frac{abd}{1+b^2}.$$

Telle est la relation qui doit être satisfaite pour que l'équation proposée ait ses deux racines égales et de même signe.