NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Théorèmes sur le cercle osculateur à une parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 350-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__350_1>

THÉORÈMES SUR LE CERCLE OSCULATEUR A UNE PARABOLE;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné est un second cercle qui touche intérieurement le premier au point donné et dont le rayon est quatre fois moindre.

Je prends pour origine le point donné, pour axe des x la tangente au cercle et pour axe des y la normale;

R, rayon du cercle;

α, β, coordonnées du foyer d'une parabole osculatrice au cercle au point donné;

$my + nx + p = 0$, équation de la directrice de cette parabole.

L'équation de la parabole peut être mise sous deux formes différentes :

$$(1)\qquad Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}\,xy + Cx^2 - 2CRy = 0 \quad (*),$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l}(1-m^2)y^2 - 2mnxy + (1-n^2)x^2 \\ \quad - 2(\beta + mp)y - 2(\alpha + np)x + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.\end{array}\right.$$

Je suppose d'abord que le radical de l'équation (1) ait le signe —, et j'écris que cette équation multipliée par un coefficient indéterminé λ est identique à l'équation (2), ce qui fournit six équations :

$$(3)\qquad \lambda A = 1 - m^2$$

$$(4)\qquad \lambda\sqrt{AC} = mn,$$

$$(5)\qquad \lambda C = 1 - n^2,$$

$$(6)\qquad \lambda CR = \beta + mp,$$

$$(7)\qquad 0 = \alpha + np,$$

$$(8)\qquad 0 = \alpha^2 + \beta^2 - p^2.$$

Je tire m et n des équations (3), (5) pour les porter dans l'équation (4) qui devient

$$\lambda = \frac{1}{A+C};$$

par suite,

$$m = \pm\sqrt{1-\lambda A}, \quad m = \pm\sqrt{\frac{C}{A+C}}.$$

Je prends d'abord

$$m = +\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

et l'équation (4) donne

$$n = +\sqrt{\frac{A}{A+C}}.$$

(*) Cette forme d'équation a été imaginée par Frégier (*voyez* les *Annales de Gergonne*, t. VI, *voyez* aussi la solution de la question 644).

Les valeurs de m et de n, substituées dans (6) et (7), donnent

$$\alpha = -p\sqrt{\frac{A}{A+C}},\quad \beta = \frac{CR}{A+C} - p\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

et ces valeurs elles-mêmes, substituées dans l'équation (8), conduisent à

$$p = +\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{A+C}},$$

d'où

$$\alpha = -\frac{R\sqrt{AC}}{2(A+C)},\quad \beta = \frac{CR}{2(A+C)};$$

or, il est visible que

$$p^2 = \frac{R\beta}{2};\quad \text{donc}\quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{R\beta}{2};$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\left(\frac{R}{4}\right) = 0.$$

C. Q. F. D.

L'équation de la directrice de la parabole s'obtient en remplaçant m, n, p par leurs valeurs,

$$y\sqrt{\frac{C}{A+C}} + x\sqrt{\frac{A}{A+C}} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{A+C}} = 0,$$

ou

$$y + x\sqrt{\frac{A}{C}} + \frac{R}{2} = 0.$$

Si l'on avait adopté pour m la valeur $-\sqrt{\frac{C}{A+C}}$, n et p auraient changé de signe, mais la directrice et par suite le foyer n'auraient pas changé.

En prenant le radical de l'équation (1) avec le signe $+$, α change de signe, mais le lieu des foyers reste le même et la directrice devient

$$y - x\sqrt{\frac{A}{C}} + \frac{R}{2} = 0.$$

Donc *les paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné sont deux à deux égales et symétriquement placées par rapport à la normale commune.*

L'ordonnée à l'origine de la directrice est constamment $-\frac{R}{2}$, donc :

Les directrices des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné passent par un point fixe.

Le rayon de courbure d'une parabole en un point donné sur la courbe est double du segment de la normale en ce point, compris entre la directrice et le point même.

Il en résulte une construction du rayon de courbure très-simple et peut-être nouvelle.

Note du Rédacteur. — Dans l'*Analyse des infiniment petits* (2e édition, publiée en 1715), il est démontré que : Si l'on projette sur un rayon vecteur FA d'une parabole, le rayon AC du cercle osculateur au point A, la projection AB est double du rayon vecteur FA.

Il en résulte que la perpendiculaire élevée au foyer F sur le rayon vecteur FA, rencontre le rayon de courbure AC en son milieu M, puisque F est le milieu de AB. Par conséquent, le lieu géométrique des foyers F des paraboles osculatrices à un cercle donné, en un point donné A, est la circonférence décrite sur AM comme diamètre. Ce qui est la proposition démontrée par M. Dupain.

Soient AD la perpendiculaire abaissée du point A sur la directrice de la parabole dont F est le foyer, et H le point où le rayon de courbure CA prolongé coupe cette directrice. L'angle DAH est, comme on sait, égal à l'angle FAC. Par suite, la similitude des triangles rectangles BAC, DAH donne

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AD} = \frac{2\,AF}{AD} = 2.$$

Donc le rayon de courbure AC est double du segment AH.

Il est clair que les directrices des paraboles osculatrices au cercle C, au point donné A, passent par le point H qui est fixe. G.