NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

# Sur la plus courte distance de deux droites quand elles deviennent parallèles

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 5 (1866), p. 346-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__346_1>

# SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES QUAND ELLES DEVIENNENT PARALLÈLES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,
Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université.

Étant données deux droites quelconques dont les équations sont :

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$
$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q',$$

on trouve la grandeur de leur plus courte distance en menant par l'une un plan P parallèle à l'autre, et prenant la distance d'un point de la dernière, par exemple de sa trace sur le plan $xy$ à ce plan auxiliaire. On trouve ainsi :

$$(1) \qquad \delta^2 = \frac{[(b'-b)(p'-p)-(a'-a)(q'-q)]^2}{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}.$$

Si les droites deviennent parallèles, cette formule est indéterminée, et on ne peut lever cette indétermination par les considérations seules qui nous ont servi à établir la formule, puisque le plan auxiliaire cesse d'être défini. Cependant, la formule s'appliquant, quelque petits que soient $a'-a$ et $b'-b$, on doit voir ce qu'elle devient quand ces différences tendent indéfiniment vers zéro. Or, quand les droites deviennent parallèles, la perpendiculaire commune devient indéterminée de position, et non transportée à l'infini; en exprimant ce fait, on trouve entre $a' - a$ et $b' - b$ une relation qui conduit à la limite de l'expression (1).

Soient :

$$a' - a = \Delta a, \quad b' - b = \Delta b.$$

Si entre les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites on élimine $z$ (*), on a une équation qui convient à cette perpendiculaire :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(a'\Delta a + b'\Delta b)\big\{(x-p)\Delta a + (y-q)\Delta b \\ &\qquad\qquad + (b\Delta a - a\Delta b)[b(x-p) - a(y-q)]\big\} \\ &-(a\Delta a + b\Delta b)\big\{(x-p')\Delta a + (y-q')\Delta b \\ &\qquad\qquad + (b\Delta a - a\Delta b)[b'(x-p') - a'(y-q')]\big\} = 0. \end{aligned}\right.$$

En regardant $\Delta a$ et $\Delta b$ comme de petites quantités du même ordre de petitesse, on remarque que le coefficient de $x$, savoir :

$$\Delta a(\Delta a^2 + \Delta b^2) + \Delta a(b\Delta a - a\Delta b)^2$$

est de l'ordre de $\Delta a^3$; il en est de même du coefficient

---

(*) L'elimination de $z$ est indiquee par la question que l'on traite ici. Il s'agit, en definitive, de determiner la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{a'-a}{b'-b}$, quand $a'$ et $b'$ convergent vers $a$ et $b$. Or, $\frac{a'-a}{b'-b}$ est, au signe près, le coefficient angulaire de la projection sur le plan $xy$, de la perpendiculaire commune aux deux droites proposées. Car en désignant par

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \beta$$

les equations de cette perpendiculaire commune, on a

$$Aa + Bb + 1 = 0, \quad Aa' + Bb' + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{a'-a}{b'-b} = -\frac{B}{A}.$$

La limite de $\frac{a'-a}{b'-b}$ est par conséquent la valeur que prend le coefficient angulaire $-\frac{B}{A}$ de la perpendiculaire commune, lorsque l'une des droites proposées devient parallèle à l'autre. G.

de $y$. Le terme constant est au contraire de l'ordre de $\Delta a^2$, en sorte que cette droite serait rejetée à l'infini quand $\Delta a$ est nul. Pour qu'elle reste à une distance finie et tendant à l'indétermination, il faut que les termes de l'ordre de $\Delta a^2$ dans la partie constante de (2) se détruisent; on trouve ainsi, en supprimant le facteur $a\Delta a + b\Delta b$ qui ne peut être nul, car (2) se réduirait à

$$b(x-p) - a(y-q) = 0,$$

ce qui est inadmissible; on trouve la condition :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Delta a}{(1+a^2)(q'-q) - ab(p'-p)} \\ &= \frac{\Delta b}{(1+b^2)(p-p') - ab(q-q')}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, la formule (1) peut s'écrire

$$\delta^2 = \frac{[(p'-p)\Delta b - (q'-q)\Delta a]^2}{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2};$$

elle est homogène en $\Delta b$, $\Delta a$, qu'on peut remplacer par les valeurs proportionnelles d'après l'équation (3); alors on trouve en supprimant les facteurs communs haut et bas,

$$\delta^2 = \frac{(p'-p)^2 + (q'-q)^2 + [b(p'-p) - a(q'-q)]^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

C'est précisément la distance de la trace sur le plan $xy$ d'une des droites à l'autre, c'est-à-dire la distance cherchée dans le cas qui nous occupe.