ROUQUET

Note sur l'intersection des deux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 343-346

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__343_1>

NOTE SUR L'INTERSECTION DES DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. ROUQUET,
Professeur au lycée de Pau.

Soient

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0,$$

les équations des deux courbes. En faisant, pour abréger,

$$A = a + a'\lambda, \quad B = b + b'\lambda, \quad C = c + c'\lambda, \ldots,$$

l'équation en λ se présente sous la forme

$$(1) \qquad AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC) = 0.$$

Il s'agit de prouver que l'une au moins des racines réelles de l'équation (1) satisfait à la condition

$$B^2 - 4AC > o.$$

A cet effet, résolvons l'équation

$$B^2 - 4AC = o,$$

ou

$$(2) \qquad (b + b'\lambda)^2 - 4(a + a'\lambda)(c + c'\lambda) = o,$$

qui devient, en ordonnant par rapport à λ,

$$(3) \quad (b'^2 - 4a'c')\lambda^2 + 2(bb' - 2ac' - 2a'c)\lambda + b^2 - 4ac = o.$$

Il y a lieu de distinguer deux cas principaux.

1° $b'^2 - 4a'c' > o$.

Si les racines de l'équation (3) sont imaginaires ou égales, toute valeur de λ donnera $B^2 - 4AC > o$.

Supposons donc que les racines λ' et λ'' de l'équation (3) soient réelles et inégales.

Remarquons d'abord que ces racines donnent le même signe à la quantité $C = c + c'\lambda$. En effet, la valeur $\lambda = -\frac{c}{c'}$ qui annule C, rendant positif le premier membre de l'équation (2), puisqu'elle le réduit au terme qui est un carré parfait, est nécessairement en dehors des racines de cette équation. Par suite λ' et λ'' ne comprenant point la racine de l'équation $C = o$ doivent donner même signe au binôme C. Admettons, pour fixer les idées, que ce signe soit positif.

Cela posé, les racines λ' et λ'' donnent à

$$(BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF)$$

une valeur positive, et comme on passe de cette expression au premier membre de l'équation (1), en divisant par le facteur positif $4C$, λ' et λ'' satisferont à l'inégalité

$$(\alpha) \qquad AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) > 0.$$

Dès lors, les quantités λ' et λ'' comprennent entre elles deux racines de l'équation (1), ou aucune.

Dans le premier cas, la racine réelle de l'équation (1), non comprise entre λ' et λ'', donnera $B^2 - 4AC > 0$; dans le second, toutes les racines réelles de l'équation considérée rempliront cette condition.

Si les deux racines λ' et λ'' rendent C négatif, l'inégalité (α) change de sens, mais les conclusions sont les mêmes.

2° $b'^2 - 4a'c' < 0$.

On sait alors (*voir* les exercices de l'*Algèbre* de M. Bertrand, 1re édition, p. 143) que les deux racines de l'équation (3) sont réelles. En outre, la valeur $\lambda = -\frac{c}{c'}$, qui annule C, rendant positif le premier membre de l'équation (2), doit être comprise entre λ' et λ'', et par suite, ces racines donnent à C des signes différents. Le premier membre de l'équation (1) étant toujours positif pour $\lambda = \lambda'$, et $\lambda = \lambda''$, conduira à des quotients positifs ou négatifs suivant le signe de C, et l'on aura alternativement pour l'une et l'autre des valeurs λ' et λ''

$$AE^2 + CD^2 - BED + F(B^2 - 4AC) < \quad \text{ou} \quad > 0.$$

Il en résulte que λ' et λ'' comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation (1).

Si elles comprennent une seule racine, celle-ci rendra positive la quantité $B^2 - 4AC$.

Si elles en comprennent trois, toutes ces valeurs donneront

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Le cas de $b'^2 - 4a'c' = 0$ se ramène aisément aux précédentes. En résumé, on voit directement, par l'examen de l'équation en λ, qu'il existe toujours un ou trois couples de sécantes réelles communes à deux courbes du second degré.