NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Note sur l'interprétation des formules qui donnent les angles des droites et des plans dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 337-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__337_0>

NOTE
sur l'interprétation des formules qui donnent les angles des droites et des plans dans l'espace;

PAR M. PAINVIN.

M. Chasles a donné, sur la transformation homographique des relations d'angles, un théorème général concernant le cas où les angles que l'on a à considérer dans une figure plane sont égaux; ce théorème, d'une extrême importance, se trouve énoncé et démontré dans la *Géométrie supérieure*, nos 624, 652. Les formules de la Géométrie analytique, qui fournissent les expressions des angles des droites et des plans dans l'espace, se prêtent facilement à une interprétation du même genre et conduisent à des propositions également importantes.

Quoique je n'aie vu nulle part ces propositions énoncées explicitement, j'ai tout lieu de croire, cependant, que plusieurs géomètres ont dû connaître et appliquer certaines d'entre elles, principalement celles qui conviennent aux droites et plans rectangulaires; ainsi, le beau Mémoire de M. Chasles, sur les surfaces homofocales (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L; 1860), renferme la considération du cercle imaginaire à l'infini. Je pense qu'il n'est pas inutile d'insister un peu sur cette question; et, si ces propositions ont déjà été énoncées, je laisse à qui de droit la priorité. Les formules bien connues de l'analytique à trois dimensions conduisant très-facilement à la démonstration des propositions que je vais énoncer, je supprimerai ces démonstrations.

ANGLE DE DEUX PLANS.

THÉORÈME Ier. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé par deux plans donnés et par les deux plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement au cercle imaginaire à l'infini, l'angle* V *de ces deux plans sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation très-simple*

$$(1)\quad \operatorname{tang} V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}.$$

Dans l'évaluation du rapport anharmonique, on doit regarder comme associés les deux plans donnés, d'une part, et les deux plans tangents au cercle imaginaire à l'infini, d'autre part.

Lorsque deux plans sont rectangulaires, ils forment un faisceau harmonique avec les deux plans menés, par leur droite d'intersection, tangentiellement au cercle imaginaire à l'infini; ou encore, leurs traces sur le plan à l'infini sont conjuguées par rapport au cercle imaginaire.

Première conséquence. — Cette proposition nous fournit une méthode précieuse pour déterminer l'angle de deux plans dans un système quelconque de coordonnées, soit coordonnées obliques, soit coordonnées tétraédriques, etc.; il suffira, en effet, de déterminer le rapport anharmonique R défini dans le théorème précédent. Or, cette détermination ne saurait offrir de difficulté, car le cercle imaginaire est l'intersection d'une sphère quelconque par le plan à l'infini ; d'un autre côté, les équations des plans d'un faisceau peuvent toujours se ramener à la forme

$$M - aN = 0, \quad M - bN = 0, \quad M - cN = 0, \quad M - dN = 0,$$

et l'on sait que le rapport anharmonique a pour expression

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)},$$

en regardant comme associés le premier et le troisième plans, le deuxième et le quatrième.

Deuxième conséquence. — Les questions où deux plans se trouvent assujettis à faire un angle donné peuvent être généralisées comme il suit :

1° A deux plans faisant un angle donné, on pourra substituer deux plans tels, que le faisceau, formé par ces deux plans et les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à une conique fixe et arbitrairement choisie, ait un rapport anharmonique donné ; les autres conditions restant les mêmes.

2° A deux plans faisant un angle donné, on pourra encore substituer deux plans tels, que le faisceau, formé par ces deux plans et les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à une surface du second ordre fixe et arbitrairement choisie, ait un rapport anharmonique donné.

A deux plans rectangulaires, on pourra substituer deux plans conjugués par rapport à une surface fixe du second ordre, c'est-à-dire deux plans tels, que le pôle de l'un quelconque d'entre eux soit sur l'autre.

Le degré des lieux géométriques correspondant à la question primitive restera le même pour la question généralisée.

ANGLE DE DEUX DROITES.

THÉOREME II. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé par les polaires (relatives au cercle imaginaire à l'infini) des traces des deux droites don-*

nées sur le plan à l'infini et par les tangentes menées au cercle du point de concours des deux polaires, l'angle V *de ces deux droites sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation*

$$(2)\quad \operatorname{tang} V = \frac{1 - R}{(1 + R)\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1 - \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}{1 + \sqrt{-1}\operatorname{tang} V}.$$

Dans l'évaluation de ce rapport anharmonique, on devra regarder comme associées les polaires des deux traces d'une part, les deux tangentes d'autre part.

Lorsque deux droites sont rectangulaires, leurs traces sur le plan à l'infini sont conjuguées par rapport au cercle imaginaire à l'infini; ou encore, les polaires de leurs traces sont conjuguées par rapport à ce cercle.

Première conséquence. — Le théorème qui vient d'être énoncé nous fournit encore une méthode facile pour déterminer, dans un système quelconque de coordonnées, l'angle de deux droites.

Deuxième conséquence. — Cette proposition nous permet aussi de généraliser les questions où deux droites se trouvent assujetties à faire un angle donné.

A deux droites faisant un angle donné, on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique fixe dans ce plan, on exprimera que les polaires (relatives à la conique) des traces des deux droites sur le plan fixe forment, avec les tangentes menées à la conique du point de concours des deux polaires, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que les plans diamétraux respectivement conjugués des deux droites forment, avec les deux plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

Les deux plans tangents sont évidemment des plans asymptotes.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une surface fixe du second ordre (S) on exprimera que les plans polaires (relatifs à la surface S) des traces des deux droites sur le plan fixe forment, avec les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface S, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

A deux droites rectangulaires on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique fixe dans dans ce plan, on exprimera que les traces des deux droites sur le plan fixe sont conjuguées par rapport à la conique.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le plan diamétral conjugué de l'une quelconque des droites est parallèle à l'autre.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une surface fixe du second ordre S, on exprimera que les plans polaires (relatifs à S) des traces des deux droites sur le plan fixe sont conjugées, c'est-à-dire que la trace de l'une quelconque des droites sera sur le plan polaire de l'autre trace.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

Théorème III. — *Si* R *est le rapport anharmonique du faisceau formé, d'une part, par la trace d'un plan donné sur le plan à l'infini et la polaire (relative au cercle imaginaire à l'infini) de la trace à l'infini d'une droite donnée; d'autre part, par les tangentes menées* *au cercle imaginaire à l'infini du point de concours des deux premières droites; l'angle* V *de la droite et du plan sera lié au rapport anharmonique* R *par la relation*

$$(3) \qquad \cot g \mathrm{V} = \frac{1 - \mathrm{R}}{(1 + \mathrm{R})\sqrt{-1}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R} = \frac{1 - \sqrt{-1} \cot g \mathrm{V}}{1 + \sqrt{-1} \cot g \mathrm{V}}.$$

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la trace de la droite sur le plan du cercle imaginaire à l'infini est, par rapport à ce cercle, le pôle de la trace du plan, et réciproquement.

Première conséquence. — Le théorème énoncé permettra encore de trouver facilement, dans un système quelconque de coordonnées, l'expression analytique de l'angle d'une droite et d'un plan.

Deuxième conséquence. — De là aussi nous conclurons la généralisation des questions où une droite et un plan se trouvent assujettis à faire un angle donné.

A une droite et un plan faisant un angle donné, on pourra substituer l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique dans ce plan, on exprimera que la polaire (par rapport à la conique) de la trace de la droite sur le plan fixe et la trace du plan donné forment, avec les tangentes menées à la conique par le point de concours des deux premières droites, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

2° Étant choisie une surface fixe du second ordre, on écrira que le plan diamétral conjugué de la droite et le plan donné forment, avec les deux plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

3° Ou encore, étant choisis un plan fixe et une surface fixe du second ordre, on exprimera que le plan polaire (par rapport à la surface) de la trace de la droite sur le plan fixe et le plan donné forment, avec les plans menés par leur droite d'intersection tangentiellement à la surface, un faisceau dont le rapport anharmonique est donné.

A une droite et un plan rectangulaires, on pourra substituer les conditions suivantes :

1° Étant choisis un plan fixe et une conique dans ce plan, on exprimera que la trace de la droite donnée sur le plan fixe est, par rapport à la conique fixe, le pôle de la trace du plan donné.

2° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le plan diamétral conjugué de la droite est parallèle au plan donné.

3° Ou encore, étant choisie une surface fixe du second ordre, on exprimera que le pôle du plan donné par rapport à la surface fixe se trouve sur la droite considérée.