NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 327-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__327_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 558

(voir 1re série, tome XX, page 65);

PAR M. VIANT,

Étant données deux figures homographiques F, F′ *dans un même plan, soient* m, m', m'' *les points du plan homologues à eux-mêmes.*

1° *Si une conique est circonscrite au triangle* $mm'm''$, *il n'existe sur cette conique que deux points tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique soient toujours homologues dans les deux figures.*

2° *Si une conique est inscrite au triangle* $mm'm''$, *il n'existe que deux tangentes telles, qu'une droite roulant sur la conique coupe ces deux tangentes en deux points toujours homologues dans les deux figures.*

(P. LAFITTE.)

Dans tout système homographique le sommet d'un angle est homologue du sommet de l'angle des droites correspondantes.

Soit donc une conique $mm'm''\alpha\beta'$ circonscrite au triangle formé par les points doubles; soient α, β' deux points satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Pour cela, il faut et il suffit que α et β' soient des points homologues. Cette condition est nécessaire d'après le principe que j'ai rappelé. Elle est suffisante; car si elle est remplie, supposons menée la droite $\alpha\gamma$ et son homologue $\alpha'\gamma$, et coupons par la droite double mm''; le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de mm'' avec $m\alpha$, $\alpha\gamma$, $\alpha m'$, $\alpha m''$ devra être le même que celui des points d'intersection de mm'' avec $m\alpha'$, $\alpha'\gamma$, $\alpha' m'$, $\alpha' m''$. Donc, γ doit se trouver sur une conique déterminée par les cinq points α, α', m, m', m''.

Ces propositions établies, je dis que sur la conique donnée il n'existe que deux points α, α' tels que l'un d'eux soit homologue de l'autre. Soit α' un point quelconque de la conique donnée, considéré comme appartenant à la figure F', mais différent des points doubles. Pour trouver son homologue α je puis me servir de la conique homologue de la première. L'homologue de α' ne peut se trouver sur la première conique qu'à la condition de coïncider avec l'un des quatre points d'intersection des deux coniques; autres que m, m', m'' qui sont des points doubles. Et réciproquement, un point autre que m, m', m'', situé à l'intersection de la conique donnée et de son homologue, sera l'homologue d'un point situé sur la conique donnée. On verrait de même que le point α' ne peut se trouver qu'à l'un des points d'intersection de la conique donnée et de l'homologue de cette conique considérée comme appartenant à la figure F.

Je crois superflu de traiter le théorème corrélatif; il suffit, dans le raisonnement, de remplacer les points par des droites, les points des coniques par des tangentes à ces courbes, et réciproquement.

Note du Rédacteur. — On démontre encore de la manière suivante qu'il ne peut exister sur une conique qui passe par les trois points m, m', m'' deux couples de points homologues α, α'; β, β'. En effet, si l'on joint les points α et α' au point β, $\alpha\beta$ aura pour homologue $\alpha'\beta$; et de même si l'on joint β et β' au point α, $\beta\alpha$ aura pour homologue $\beta'\alpha$. Donc $\alpha'\beta$ et $\alpha\beta'$ doivent coïncider, ce qui ne peut avoir lieu que si α et β coincident ainsi que α' et β' P.

Question 753

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 95),

PAR M. C. MASSING,
Élève de l'École Centrale.

Si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse ou à une hyperbole des tangentes faisant un angle donné, on trouve une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2 = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}.$$

Réciproquement, étant donnée une équation de cette forme, peut-on trouver une ellipse ou une hyperbole telle, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole, ces tangentes fassent un angle donné? Le problème a-t-il plusieurs solutions? (G. DARBOUX.)

L'équation du lieu des points d'où l'on peut mener à une hyperbole ou à une ellipse des tangentes faisant un angle V, est

$$(1)\quad (x^2+y^2)^2 \left.\begin{matrix} -2(a^2\pm b^2)\\ -\dfrac{4a^2}{\text{tang}^2 \mathrm{V}}\end{matrix}\right| y^2 \left.\begin{matrix} -2(a^2\pm b^2)\\ \mp\dfrac{4b^2}{\text{tang}^2 \mathrm{V}}\end{matrix}\right| x^2 + (a^2\pm b^2)^2 \pm \frac{4a^2b^2}{\text{tang}^2 \mathrm{V}} = 0,$$

le signe supérieur qui précède b^2 se rapportant à l'ellipse, le signe inférieur à l'hyperbole : a^2 et $\pm b^2$ désignant les carrés des longueurs des demi-axes de la conique, qu'on a rapportée à ses axes. Examinons dans quel cas on peut identifier l'équation (1) avec l'équation

$$(x^2+y^2)^2 - \mathrm{A}x^2 - \mathrm{B}y^2 - \mathrm{C} = 0,$$

en supposant qu'on fasse précéder b^2 du signe $+$.

Pour que cette identification puisse avoir lieu, il faut que les trois équations

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{\mathrm{tang}^2 V} = \frac{B}{2},$$

$$(3) \qquad a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{\mathrm{tang}^2 V} = \frac{A}{2},$$

$$(4) \qquad (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{\mathrm{tang}^2 V} + C = 0,$$

donnent pour a^2, b^2 et $\mathrm{tang}^2 V$ des valeurs réelles et positives.

L'inspection de ces équations montre que cela ne peut avoir lieu que si l'on n'a, tout d'abord,

$$B > A > 0,$$
$$C < 0.$$

Je cherche les valeurs de a^2, b^2 et $\mathrm{tang}^2 V$ qui satisfont au système des équations (2), (3) et (4). J'élève au carré les deux membres de l'équation (3), et de l'équation ainsi obtenue, soit

$$(a^2 + b^2)^2 + \frac{4(a^2 + b^2)b^2}{\mathrm{tang}^2 V} + \frac{4b^4}{\mathrm{tang}^4 V} - \frac{A^2}{4} = 0,$$

je retranche l'équation (4); en effectuant les réductions, je trouve

$$(5) \qquad 4b^4 = \left(\frac{A^2}{4} + C\right) \sin^2 V \,\mathrm{tang}^2 V.$$

Opérant de même sur l'équation (2), je trouve

$$(6) \qquad 4a^4 = \left(\frac{B^2}{4} + C\right) \sin^2 V \,\mathrm{tang}^2 V;$$

et enfin si j'élimine a^2 et b^2 entre les équations (2), (3), (4), j'obtiens

$$(7) \qquad (A - B)^2 \mathrm{tang}^4 V - 4(AB + 4C)\,\mathrm{tang}^2 V - 16C = 0.$$

Cette équation, où $\tang^2 V$ est l'inconnue, aura ses racines réelles, si l'on a

$$(AB + 4C)^2 + 4C(A - B) > 0,$$

ou, sous une forme plus simple,

$$(-4C - B^2)(-4C - A^2) > 0.$$

ce qui exige que l'on ait ou

$$-4C < A^2,$$

ou

$$-4C > B^2.$$

Dans cette deuxième hypothèse, on aurait pour a^4 une valeur négative. Si donc les coefficients A, B, C satisfont aux inégalités

$$B > A > 0,$$
$$C < 0, \quad A^2 + 4C > 0,$$

on aura pour l'équation (7) deux racines réelles de même signe et positives, puisque l'on a

$$AB > A^2 > -4C,$$

et, par suite,

$$AB + 4C > 0:$$

et à ces racines correspondront des valeurs réelles et positives de a^4 et b^4, comme l'indiquent les équations (5) et (6).

Donc, dans les hypothèses où nous nous plaçons, il existe deux ellipses telles, que si d'un point de la courbe donnée on mène des tangentes à ces ellipses, ces tangentes fassent un angle déterminé pour chacune d'elles par l'équation (7).

Examinons maintenant dans quel cas on pourra trouver une ou plusieurs hyperboles répondant à la question. Je remplace dans toutes les équations précédentes b^2 par $-b^2$. A priori, pour qu'il y ait une solution au problème, il faut toujours que l'on ait

$$B > A.$$

Mais C peut être positif ou négatif. Examinons successivement ces deux cas :

1° Si C est positif, l'équation (7) a ses deux racines réelles en considérant $\tan^2 V$ comme inconnue, mais une seule est positive. L'équation (5) montre que si

$$\frac{A^2}{4} + C > 0,$$

on aura une valeur positive de b^4 correspondant à cette valeur de $\tan^2 V$. Si donc les coefficients A, B, C satisfont aux inégalités

$$B > A, \quad C > 0, \quad \frac{A^2}{4} + C > 0,$$

on a une hyperbole répondant à la question.

2° Supposons $C < 0$, les mêmes remarques que dans le cas de l'ellipse montrent que si l'on a

$$B > A, \quad \frac{A^2}{4} + C > 0:$$

il existe deux hyperboles répondant à la question, et à chacune d'elles correspond un angle déterminé par l'équation (7), et tel, que si d'un point de la courbe donné on mène deux tangentes à cette hyperbole, elles fassent entre elles cet angle. Ainsi en résumé : pour que le problème admette une ou plusieurs solutions, il faut que les coefficients A, B, C satisfassent aux inégalités du tableau suivant :

$$
\left.\begin{array}{l} B > A, \\ A^2 + 4C > 0 \end{array}\right\}
\left\{\begin{array}{l}
C > 0, \\
\text{une hyperbole;} \\
C < 0 \left\{\begin{array}{l}
A > 0, \\
\text{deux ellipses et deux hyperboles;} \\
A < 0, \\
\text{deux hyperboles.}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{l} B = A \\ C < 0 \\ A^2 + 4C > 0 \end{array}\right\}
\left\{\begin{array}{l}
\sin^2 V = -\dfrac{4C}{A^2}, \\
a^2 = b^2 = \pm \dfrac{2C}{A}. \\
\text{un cercle et une hyperbole équilatère.}
\end{array}\right.
$$

Note. — La même question a été traitée par M. Niébylowski.

Question 757

(voir 2e série, t. V, p. 190);

Par M. BRICOUT DE MONTAY.

On donne une courbe de troisième classe ayant une tangente double : les points de contact de cette courbe et de la tangente sont A, B. *D'un point quelconque pris dans le plan de la courbe donnée, on mène à celle-ci trois tangentes qui coupent la tangente* AB *aux points* M, N, P. *On a toujours*

$$
\frac{AM.AN.AP}{BM.BN.BP} = \frac{\rho_a}{\rho_b},
$$

ρ_a *et* ρ_b *étant les rayons de courbure de la courbe donnée aux points* A et B. (Mannheim.)

Lemme. — *On donne une courbe du troisième ordre* *ayant un point double* O, *soient* OA *et* OB *les tangentes. Soit une sécante quelconque rencontrant la courbe aux trois points* M, N, P *et les deux tangentes aux points* A *et* B. *Je dis que*

$$\frac{\sin \mathrm{AOM} \sin \mathrm{AON} \sin \mathrm{AOP}}{\sin \mathrm{BOM} \sin \mathrm{BON} \sin \mathrm{BOP}}$$

est indépendant de la position de la sécante.

En effet,

$$\frac{\sin \mathrm{AOM}}{\sin \mathrm{BOM}} = \frac{\mathrm{AOM}}{\mathrm{BOM}} \cdot \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{AO}};$$

par suite

$$\frac{\sin \mathrm{AOM} . \sin \mathrm{AON} . \sin \mathrm{AOP}}{\sin \mathrm{BOM} . \sin \mathrm{BON} . \sin \mathrm{BOP}} = \frac{\mathrm{AM} . \mathrm{AN} . \mathrm{AP}}{\mathrm{BM} . \mathrm{BN} . \mathrm{BP}} \times \frac{\overline{\mathrm{BO}}^3}{\overline{\mathrm{AO}}^3}.$$

Or, rapportée aux deux tangentes, la courbe a pour équation

$$f(x, y) = xy + \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma x^2 y + \gamma' x y^2 = 0.$$

Soient

$$\mathrm{AO} = a, \quad \mathrm{BO} = b.$$

Alors

$$\frac{\mathrm{AM} . \mathrm{AN} . \mathrm{AP}}{\mathrm{BM} . \mathrm{BN} . \mathrm{BP}} \times \frac{\overline{\mathrm{BO}}^3}{\overline{\mathrm{AO}}^3} = \frac{f(a, 0)}{f(0, b)} \times \frac{b^3}{a^3} = \frac{\alpha}{\beta} = \text{const.}$$

Ce qui démontre notre lemme.

Si nous transformons cette proposition par les polaires réciproques, la courbe directrice étant un cercle, nous arrivons au théorème suivant :

Soient A *et* B *les points de contact d'une tangente double à une courbe de troisième classe, d'un point quel-*

conque on mène des tangentes à cette courbe qui rencontrent la première en MNP. *On a la relation*

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = k = \text{const.}$$

Supposons que le point O se meuve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, et supposons-lui une position telle, que AM et par suite BP soient des infiniment petits du premier ordre.

AM et BP sont alors égales à un infiniment petit du deuxième ordre près aux moitiés des arcs élémentaires s et σ de la courbe en A et B.

Si α et β sont les angles de AB avec OM et OP,

$$k = \frac{\frac{s}{\beta}}{\frac{\sigma}{\alpha}} \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN} = \frac{\rho_a}{\rho_b} \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN},$$

en négligeant les infiniment petits que l'on a le droit de négliger. Mais

$$\alpha = ON \frac{\sin(OM.ON)}{MN}, \quad \beta = ON \frac{\sin(ON.OP)}{NP}$$

et

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{MN}{PN} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{NP}^2} \frac{\sin(ON.OP)}{\sin(OM.ON)}.$$

Quantité dont la limite, lorsque le point O est au milieu de AB, est égale à l'unité. On a donc

$$\frac{AM \times AN \times AP}{BM \times BN \times BP} = \frac{\rho_a}{\rho_b}.$$
