NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. STÉPHAN

Construction des centres des circonférences tangentes à trois circonférences données et des centres des sphères tangentes à quatre sphères données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 321-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__321_1>

CONSTRUCTION (*)

des centres des circonférences tangentes à trois circonférences données et des centres des sphères tangentes à quatre sphères données;

PAR M. E. STÉPHAN.

THÉORÈME I. — *Si l'on augmente ou si l'on diminue d'une même quantité variable les rayons de trois circonférences* C_1, C_2, C_3, *leur centre radical décrit une ligne droite* $O_1 O_2$.

La droite $O_1 O_2$ passe par les centres O_1, O_2 des deux circonférences tangentes, l'une intérieurement, l'autre extérieurement aux trois circonférences C_1, C_2, C_3. Il résulte de là que :

Pour trouver les centres O_1, O_2, *il suffit de déterminer les points de la droite* $O_1 O_2$ *qui sont à égale distance de deux des trois cercles* C_1, C_2, C_3.

Ce dernier problème peut être énoncé plus généralement sous la forme suivante :

(*) Extrait du *Bulletin de la Société Philomathique*, p. 133; 1865.

Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une courbe du second degré : or, on sait résoudre cette question dans tous les cas, par plusieurs procédés simples, avec la règle et le compas.

Si l'on augmente le rayon de l'une des circonférences, de C_1 par exemple, d'une certaine quantité et que l'on diminue en même temps les rayons des deux autres C_2, C_3 de la même quantité, ou inversement, le centre radical décrit une autre droite qui passe par les centres des circonférences tangentes extérieurement à C_1 et intérieurement à C_2 et C_3 ou inversement.

En résumé : *Il existe quatre droites, faciles à construire, sur lesquelles sont situés par couples les centres des huit circonférences qui, dans le cas le plus général, répondent à la question proposée* (*).

Théorème II. — *La droite* $O_1 O_2$ *est perpendiculaire à l'axe de similitude des circonférences* C_1, C_2, C_3.

Cette propriété, connue de Gergonne, ressort aussi d'un travail de M. Mannheim sur le lieu des centres des circonférences qui coupent trois circonférences données sous le même angle.

Ce qui précède peut être répété textuellement pour quatre sphères.

Théorème III. — *Quand on augmente ou quand on diminue d'une même quantité variable les rayons de quatre sphères* S_1, S_2, S_3, S_4, *leur centre radical décrit une droite* $O_1 O_2$.

La droite $O_1 O_2$ passe par les centres O_1, O_2 des deux sphères tangentes, l'une intérieurement, l'autre extérieurement aux quatre sphères S_1, S_2, S_3, S_4. Il résulte de

(*) Pour la question analogue relative aux petits cercles de la sphère, consulter un excellent Mémoire de M. Heegmann, dans le *Recueil de la Société de Lille ;* 1826. P.

là que : *Pour trouver les centres* O_1, O_2, *il suffit de déterminer les points de la droite* $O_1 O_2$ *qui sont à égale distance de deux des quatre sphères données.*

Cette question se résout à peu près de la même manière que la question de Géométrie plane qui lui correspond.

Les centres des seize sphères qui, dans le cas général, répondent à la question, sont situés par couples sur huit droites analogues à $O_1 O_2$.

On sait que les plans radicaux de trois sphères, de S_1, S_2, S_3 par exemple, se coupent suivant une même droite (D_4) appelée axe radical des sphères.

THÉORÈME IV. — *Si l'on augmente d'une même quantité variable les rayons des sphères* S_1, S_2, S_3, *la droite* (D_4) *décrit un plan* (P_4) *perpendiculaire à leur axe de similitude.*

Si l'on augmente d'une même quantité les quatre rayons, on a quatre plans analogues (P_1), (P_2), (P_3), (P_4).

THÉORÈME V. — *Les plans* (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) *se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan de similitude des quatre sphères.*

C'est cette droite qui nous sert à effectuer notre construction.