NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Théorèmes relatifs aux courbes et aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 299-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__299_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORÈMES RELATIFS AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. H. FAURE.

1. Considérons la fonction

$$(1)\qquad \varphi = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \ldots + M\mu^2$$

des carrés des n variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$, et posons

$$(2)\qquad V_r = A\alpha_r\alpha + B\beta_r\beta + C\gamma_r\gamma + \ldots + M\mu_r\mu.$$

En donnant à r les n valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, on aura n relations semblables. Désignons par V_{rs} le résultat que l'on obtient en remplaçant dans V_r les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ respectivement par $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \ldots, \mu_s$, et supposons que $V_{rs} = 0$, lorsque les indices r et s sont différents entre eux.

Ecrivons l'équation

$$(3)\qquad \varphi' = \sum a_{rs} V_r V_s = 0,$$

les coefficients a_{rs} étant des constantes quelconques, nulles lorsque les indices r et s sont égaux. Ces indices prenant les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$, si l'on représente par $A', B', C', \ldots, M'$ les coefficients des variables α^2, $\beta^2, \ldots, \mu^2$ dans l'équation (3), on trouve

$$A' = A^2 \sum a_{rs}\alpha_r\alpha_s, \quad B' = B^2 \sum a_{rs}\beta_r\beta_s \ldots,$$

$$M' = M^2 \sum a_{rs}\mu_r\mu_s,$$

d'où

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}+\ldots+\frac{M'}{M}=\sum a_{rs}(A\alpha_r\alpha_s+B\beta_r\beta_s+\ldots M\mu_r\mu_s)$$
$$=\sum a_{rs}V_{rs}=0,$$

en ayant égard à l'hypothèse $V_{rs}=0$.

2. Désignons par V_{r} le résultat que l'on obtient en remplaçant dans V_r les variables α, β,..., μ par α_r, β_r,..., μ_r, et supposons $V_{rr}=0$.

Écrivons l'équation

$$\varphi'=\sum a_r V_r^2=0, \tag{4}$$

les coefficients a_r, b_r,..., étant des constantes.

Si l'on représente par A', B',..., M' les carrés des coefficients des variables α, β,..., μ dans l'équation (4), on trouve

$$A'=A^2\sum a_r\alpha_r^2,\quad B'=B^2\sum a_r\beta_r^2,\ldots,\quad M'=M^2\sum a_r\mu_r^2,$$

d'où

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}+\cdots+\frac{M'}{M}=\sum a_r(A\alpha_r^2+B\beta_r^2+\ldots+M\mu_r^2)$$
$$=\sum a_r V_{rr}=0.$$

en ayant égard à l'hypothèse $V_{rr}=0$.

3. *Applications géométriques.* — Soit

$$n=3\quad\text{et}\quad\varphi=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2.$$

L'équation $\varphi=0$ représente une conique conjuguée à un triangle *abc* pris pour triangle de référence, α, β, γ étant les distances d'un point de la conique aux côtés de ce triangle.

L'équation $V_r = 0$ représente la polaire du point qui a pour coordonnées α_r, β_r, γ_r. En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, nous avons trois droites déterminant un triangle $a'b'c'$, et les conditions $V_{rs} = 0$ montrent que la conique φ est également conjuguée à ce triangle.

Comme d'ailleurs l'équation (3) est celle d'une conique circonscrite au triangle $a'b'c'$, nous avons ce théorème :

THÉORÈME I. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à deux triangles abc, $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports que l'on obtient en divisant les coefficients des carrés des variables dans φ' par les coefficients de ces mêmes variables dans φ est nulle.*

D'après le n° 2, on voit que $V_r = 0$ est une tangente à la conique conjuguée φ, parce que $V_{rr} = 0$.

En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, nous avons trois tangentes à la conique φ déterminant un triangle $a'b'c'$.

La conique (4) étant conjuguée à ce triangle, nous avons ce théorème :

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à un triangle abc et inscrite dans un triangle $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' conjuguée au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports que l'on obtient en divisant les coefficients des carrés des variables dans φ' par les coefficients des carrés des mêmes variables dans φ est nulle.*

Si l'on a égard à la définition que nous avons donnée de la *caractéristique* d'un point (p. 9) par rapport à une conique, on pourra énoncer ces deux théorèmes comme il suit :

THÉORÈME I. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à deux triangles abc, $a'b'c'$, si l'on conçoit une conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$, la somme des rapports* *que l'on obtient en divisant les caractéristiques des points a, b, c par rapport à φ', par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à φ, est nulle.*

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une conique φ est conjuguée à un triangle abc et inscrite dans un triangle a' b' c', si l'on conçoit une conique φ' conjuguée au triangle a' b' c', la somme des rapports que l'on obtient, en divisant les caractéristiques des points a, b, c par rapport à φ', par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à φ, est nulle.*

Corollaires. — En désignant par π_r la caractéristique du point r par rapport à la conique φ, par π'_r la caractéristique de ce même point par rapport à la conique φ', nos deux théorèmes donnent

$$\text{(A)} \qquad \frac{\pi'_a}{\pi_a} + \frac{\pi'_b}{\pi_b} + \frac{\pi'_c}{\pi_c} = 0.$$

Ce qui suit est le développement de cette relation.

1° Le théorème I nous montre que si la conique φ' circonscrite au triangle $a'b'c'$ passe par deux des sommets du triangle abc, par a et b par exemple (auquel cas $\pi'_a = \pi'_b = 0$), elle passera aussi par le sommet c, puisque d'après le théorème on a $\pi'_c = 0$. (CHASLES.)

La même considération appliquée au théorème II montre que

2° Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle $a'b'c'$ et conjuguée à un triangle abc, on peut circonscrire au triangle abc une conique conjuguée à $a'b'c'$.

Les polaires réciproques donnent cet autre théorème.

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle $a'b'c'$ et conjuguée à un triangle abc, on peut inscrire dans ce triangle une conique conjuguée à $a'b'c'$.

On sait qu'une hyperbole équilatère est conjuguée au triangle qui a pour sommets les points à l'infini sur un cercle et le centre de l'hyperbole. Les théorèmes ci-dessus donnent alors les suivants :

Lorsqu'une hyperbole équilatère est inscrite dans un triangle, le cercle conjugué à ce triangle passe par le centre de l'hyperbole.

Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, la conique conjuguée à ce triangle qui a pour foyer le centre de l'hyperbole est une parabole.

Dans les théorèmes généraux exprimés par l'équation (A), la conique φ' peut représenter deux droites conjuguées à la conique φ. Dans ce cas la caractéristique π'_a doit être remplacée par le produit des distances du point a aux deux droites. On a par conséquent ce théorème :

3° Une conique φ étant conjuguée à un triangle abc, si l'on désigne par d_r, d'_r les distances d'un point r à deux droites conjuguées à la conique φ, on a

$$\frac{d_a d'_a}{\pi_a} + \frac{d_b d'_b}{\pi_b} + \frac{d_c d'_c}{\pi_c} = 0.$$

Si les deux droites conjuguées coïncident, elles se confondent avec une tangente à la conique, donc

4° Une conique φ étant conjuguée à un triangle abc, si l'on désigne par d_a, d_b, d_c les distances de ses sommets à une tangente de φ, on a

$$\frac{d_a^2}{\pi_a} + \frac{d_b^2}{\pi_b} + \frac{d_c^2}{\pi_c} = 0.$$

Par les sommets du triangle $a'b'c'$, menons une conique touchant les deux côtés ab, ac du triangle abc, et désignons par b_1, c_1 les points de contact sur ces côtés respectivement; la relation (A) devient

$$\frac{1}{\pi_a} + \frac{1}{\pi_b}\cdot\frac{\overline{bb_1}^2}{\overline{ab_1}^2} + \frac{1}{\pi_c}\cdot\frac{\overline{cc_1}^2}{\overline{ac_1}^2} = 0.$$

Cette condition, d'après le théorème précédent, signifie que la droite $b_1 c_1$ touche la conique φ, donc, d'après le théorème I,

5° Une conique φ étant conjuguée à un triangle $a'b'c'$, si par les sommets de ce triangle on mène une conique touchant deux droites conjuguées à φ, la corde de contact touchera la conique.

Comme cas particuliers, il résulte que

Si par le centre d'une hyperbole équilatère on mène un cercle touchant deux droites conjuguées à l'hyperbole, la corde de contact touchera l'hyperbole.

Une hyperbole équilatère étant conjuguée à un triangle, si par des sommets on mène une conique ayant pour foyer le centre de l'hyperbole, la directrice correspondante touchera l'hyperbole.

La théorie des polaires réciproques donne ce théorème:

6° Une conique φ étant conjuguée à un triangle $a'b'c'$, si l'on inscrit dans ce triangle une conique φ' passant par deux points a, b conjugués à la conique φ, les tangentes à la conique φ' menées par les points a et b se couperont sur la conique φ.

Si les points a, b sont à l'infini sur un cercle, on voit que

Lorsqu'une hyperbole équilatère est conjuguée à un triangle, les centres des cercles inscrits à ce triangle sont sur l'hyperbole.

D'après le théorème II on arrive, par des considérations analogues, aux suivants :

7° Une conique φ étant inscrite dans un triangle $a'b'c'$, si l'on mène une conique conjuguée $a'b'c'$ et touchant deux droites conjuguées à φ, la corde de contact touchera la conique φ.

8° Une conique φ étant circonscrite à un triangle $a'b'c'$, si l'on mène une conique φ' conjuguée à $a'b'c'$ par deux points a, b conjugués à la conique φ, les tangentes à la conique φ' menées par les points a et b se couperont sur φ.

Si les points b', c' sont à l'infini sur un cercle, nous trouvons que

Lorsqu'une parabole φ a pour foyer le centre d'une hyperbole équilatère, si l'on mène à l'hyperbole deux tangentes qui soient conjuguées à la parabole, la corde de contact touchera la parabole.

Lorsqu'un cercle passe par le centre d'une hyperbole équilatère, les tangentes menées d'un point du cercle à l'hyperbole rencontrent cette courbe en deux points conjugués par rapport au cercle.

Lorsqu'une conique φ est conjuguée à un triangle abc, la caractéristique de l'un des sommets a est égal au rapport $\frac{abc}{obc}$, en désignant par o le centre de la conique.

Deux coniques φ et φ' sont conjuguées à un même triangle abc déterminé par les points d'intersection des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère inscrit dans les deux coniques; donc, en ayant égard à l'observation précédente et au théorème I,

9° Deux coniques ayant pour centres les points o et o', si l'on peut inscrire dans la conique o' un triangle conjugué à la conique o, on aura la relation

$$\frac{obc}{o'bc} + \frac{oca}{o'ca} + \frac{oab}{o'ab} = 0,$$

dans laquelle a, b, c sont les points qui ont la même polaire dans les deux coniques.

D'après le théorème II, on voit que cette même relation existera si l'on peut circonscrire à la conique o un triangle conjugué à la conique o'.

Si l'on désigne par α. β, γ les distances du centre o aux côtés du triangle abc par α', β', γ' les distances du centre o' aux côtés du même triangle, ce théorème donne

$$\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}=0.$$

Supposons que les coniques o et o' se touchent au point a, les points a et b venant coïncider, la relation ci-dessus devient

$$\frac{2\alpha}{\alpha'}+\frac{\gamma}{\gamma'}=0.$$

Or, en général, si P représente le produit des carrés des demi-axes principaux d'une conique conjuguée à un triangle, R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$P=2R\alpha\beta\gamma$$

pour la conique o (question 560), et

$$P'=2R\alpha'\beta'\gamma';$$

dans le cas où les coniques se touchent

$$\frac{P}{P'}=\frac{\alpha^2\gamma}{\alpha'^2\gamma'}.$$

D'autre part, si ρ est le rayon de courbure de la conique o au point de contact a, ρ' le rayon de courbure de la conique o' au même point, on a

$$P=\rho\alpha^3,\quad P'=\rho'\alpha'^3\quad \text{et}\quad \frac{P}{P'}=\frac{\rho\alpha^3}{\rho'\alpha'^3}.$$

L'égalité des rapports $\frac{P}{P'}$ donne

$$\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{\rho\alpha}{\rho'\alpha'},$$

donc, en vertu du théorème précédent,

$$2\rho'+\rho=0.$$

Lorsque deux coniques o et o' se touchent, si l'on peut inscrire dans la conique o' un triangle conjugué à o (ou circonscrire à o un triangle conjugué à o'), le rayon de courbure de la conique o au point de contact sera le double de celui de la conique o' au même point et dirigé en sens contraire.

Désignons par a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 les points d'intersection de la conique φ avec les côtés du triangle respectivement opposés aux sommets a, b, c, soient A, B, C les demi-diamètres de φ parallèles à ces mêmes côtés. Ajoutant un accent à ce qui est relatif à la conique φ', la relation (A) devient

$$\frac{ab'_1 \,.\, ab'_2}{ab_1 \,.\, ab_2}\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{B}'^2} + \frac{ba'_1 \,.\, ba'_2}{ba_1 \,.\, ba_2}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}'^2} + \frac{\pi'_c}{\pi_c} = 0$$

en laissant subsister le dernier terme tel qu'il est.

Supposons que le triangle abc ait son côté ab à l'infini, de sorte que c devienne le centre de la conique φ, ca, cb deux de ses diamètres conjugués. La relation précédente se réduit à

$$\text{(B)} \qquad \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}'^2} + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{B}'^2} = \pi'_c$$

en remarquant que $\pi_c = -1$.

Les théorèmes I et II donnent cet énoncé.

10° Etant données deux coniques φ et φ', cette dernière étant circonscrite à un triangle conjugué à φ (ou conjuguée à un triangle circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B deux demi-diamètres conjugués de φ, par A′, B′ les demi-diamètres de φ' parallèles aux premiers, on a la relation précédente dans laquelle π'_c est la caractéristique du centre de φ par rapport à φ'.

Si φ est un cercle on a ces théorèmes :

11° La somme des carrés des inverses des demi-axes principaux d'une conique φ' circonscrite à un triangle (ou conjuguée à un triangle) est égale à la caractéristique du centre du cercle conjugué au triangle (ou du centre d'un cercle inscrit au triangle), par rapport à φ' divisé par le carré du rayon du cercle.

Si au contraire φ' est un cercle, on a ces théorèmes :

12° La somme des carrés des demi-axes principaux d'une conique conjuguée à un triangle (ou inscrite dans un triangle) est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit (ou conjugué) au triangle.

Remarque. — Ces deux théorèmes ont été proposés en questions dans les *Nouvelles Annales*, n^{os} 524 et 562. Le numéro de juin 1864 (p. 257) contient une solution de la question 562, mais quelques inexactitudes de l'auteur l'amènent à une erreur dans un coefficient numérique. Je ferai la même observation à l'égard de la question 561, dont l'énoncé modifié (1864, p. 253) est inexact. L'énoncé qui figure tome XX, 1re série, page 56, est exact.

Dans la relation (B) remplaçons π'_c par sa valeur, on aura

$$\frac{A^2}{A'^2}+\frac{B^2}{B'^2}=\frac{ca'_1 . ca'_2}{A'^2}, \qquad \frac{A^2}{A'^2}+\frac{B^2}{B'^2}=\frac{cb'_1 . cb'_2}{B'^2}.$$

Si l'on élimine A′ et B′ de ces deux relations, on a ces théorèmes :

13° Étant donnés une conique φ ayant pour centre le point c et deux de ses demi-diamètres conjugués A, B, si une conique φ', circonscrite à un triangle conjugué à φ (ou conjuguée à un triangle circonscrit à φ), rencontre ces deux diamètres respectivement aux points a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, on aura la relation

$$\text{(C)} \qquad \frac{A^2}{ca'_1 . ca'_2}+\frac{B^2}{cb'_1 . cb'_2}=1.$$

Si la conique φ est un cercle, on voit que : si par un point fixe c on trace deux droites rectangulaires rencontrant une conique, l'une aux points a_1, a_2, l'autre aux points b_1, b_2, on a la relation

$$\frac{1}{ca_1 . ca_2} + \frac{1}{cb_1 . cb_2} = \text{const.}$$

La valeur de la constante résulte du précédent théorème. Si c est le centre de la conique, on retrouve un théorème connu.

Lorsque dans la relation (B) on suppose que la conique φ' passe par le centre de φ, nous dirons que :

Lorsqu'une conique φ' passe par trois points conjugués à une conique φ (ou bien est conjuguée à un triangle circirconscrit à φ) et par son centre, si l'on désigne par A, B deux diamètres conjugués de φ et par A', B' les diamètres qui leur sont parallèles dans φ', on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} = 0.$$

Cette relation montre que si l'une des coniques est un cercle, l'autre est une hyperbole équilatère, ce qui donne quatre théorèmes plus ou moins connus.

La même relation (B) donne le théorème suivant :

Lorsqu'une conique φ' concentrique à une conique φ passe par trois points conjugués de celle-ci (ou est conjuguée à un triangle circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B deux diamètres conjugués de φ, par A', B' les diamètres de φ' de même direction que les premiers, on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} + 1 = 0.$$

La relation (C) donne :

Lorsqu'une conique φ' passe par les extrémités d'un diamètre de la conique φ et trois points conjugués de celle-ci (ou est conjuguée à un triangle circonscrit à φ), elle rencontre le diamètre A conjugué au premier en deux points a_1, a_2 tels que

$$2ca_1 ca_2 = A^2,$$

c étant le centre de φ, A la longueur du demi-diamètre.

4. Pour $n = 4$, on a deux théorèmes généraux analogues à ceux démontrés plus haut (p. 301) :

Théorèmes III et IV. — *Lorsqu'une surface φ du second ordre conjuguée à un tétraèdre abcd est conjuguée à un second tétraèdre $a'b'c'd'$ (ou inscrite dans ce tétraèdre), si l'on conçoit une surface φ' du même ordre circonscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$ (ou conjuguée à ce tétraèdre), la somme des quotients que l'on obtient, en divisant les caractéristiques des points a, b, c, d par rapport à φ', par les caractéristiques de ces mêmes points par rapport à φ, est nulle.*

En désignant par π_a, π'_a les caractéristiques du sommet a, par rapport aux surfaces φ et φ', nous écrirons donc

$$\sum \frac{\pi'_a}{\pi_a} = 0.$$

Nous nous bornons à énoncer les théorèmes déduits de cette relation, en suivant le même ordre que pour les coniques.

1° Toute surface du second ordre qui passe par sept des sommets de deux tétraèdres conjugués, passe par le huitième.

2° Toute surface du second ordre φ' conjuguée à un tétraèdre $a'b'c'd'$, circonscrit à une surface φ du second ordre, et qui passe par trois des sommets d'un tétraèdre conjugué à φ, passe par le quatrième sommet.

La théorie des polaires réciproques donne deux autres théorèmes :

3° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre *abcd*, si l'on désigne par p_a, p'_a les distances du sommet a à deux plans conjugués par rapport à φ, on a

$$\sum \frac{p_a p'_a}{\pi_a} = 0.$$

4° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre *abcd*, si l'on désigne par p_a la distance du sommet a à un plan tangent à φ, on a

$$\sum \frac{p_a^2}{\pi_a} = 0.$$

5° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre, si par les sommets de ce tétraèdre on conçoit une surface du second ordre touchant les arêtes d'un trièdre conjugué à φ, le plan passant par les points de contact touchera la surface φ.

6° Une surface du second ordre φ étant conjuguée à un tétraèdre, si l'on inscrit dans ce tétraèdre une surface du second ordre φ', tangente aux trois côtés d'un triangle conjugué à φ, les plans tangents à la surface φ' menée par les trois points de contact se couperont sur φ. (Réciproque du précédent.)

7° Une surface du second ordre φ étant inscrite dans un tétraèdre, si l'on conçoit une surface du second ordre φ', conjuguée à ce tétraèdre et touchant les arêtes d'un trièdre conjugué à φ, le plan passant par les points de contact touchera la surface φ.

8° Une surface du second ordre φ étant circonscrite à un tétraèdre, si l'on conçoit une surface du second ordre φ' conjuguée à ce tétraèdre et touchant les côtés d'un triangle conjugué à φ, les plans tangents aux points de contact menés à la surface φ' se couperont sur φ.

9° Deux surfaces du second ordre étant données, si l'on désigne par α, β, γ, δ les distances du centre de l'une d'elles φ aux faces du tétraèdre conjugué à la fois aux deux surfaces, par α', β', γ', δ' les distances du centre de la seconde φ' à ces mêmes plans, on pourra inscrire dans la surface φ' un tétraèdre conjugué à φ, si l'on a la relation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\delta}{\delta'} = 0.$$

Cette même relation aura lieu si l'on peut circonscrire à φ un tétraèdre conjugué à φ'.

10° Étant données deux surfaces du second ordre φ et φ', cette dernière étant circonscrite à un tétraèdre conjugué à φ (ou conjugué à un tétraèdre circonscrit à φ), si l'on désigne par A, B, C trois demi-diamètres conjugués de φ, par A', B', C' les demi-diamètres de φ' parallèles aux premiers, on a la relation

$$\frac{A^2}{A'^2} + \frac{B^2}{B'^2} + \frac{C^2}{C'^2} = \pi'_d,$$

dans laquelle π'_d est la caractéristique du centre d de φ par rapport à φ'.

Si φ est une sphère on a ces théorèmes :

11° La somme des carrés des inverses des demi-axes principaux (ou de trois demi-diamètres rectangulaires) d'une surface φ' circonscrite à un tétraèdre (ou conjuguée à ce tétraèdre) est égale à la caractéristique du centre de la sphère conjuguée au tétraèdre (ou du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre) par rapport à φ' divisé par le carré du rayon de la sphère (*).

Si, au contraire, φ' est une sphère :

(*) Ce théorème revient à celui donné par M. Painvin dans la question 760, que M. Faure ne connaissait pas quand il nous a envoyé son article au mois de novembre dernier. P.

12° La somme des carrés des demi-axes principaux d'une surface du second degré conjuguée à un tétraèdre (ou inscrite dans un tétraèdre) est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite (ou conjuguée) au tétraèdre.

Remarque. — Un tétraèdre n'a pas en général de sphère conjuguée, il faut pour cela que ses arêtes opposées soient rectangulaires; le point de rencontre de ses hauteurs est le centre de la sphère conjuguée. Les théorèmes dans lesquels figurent une sphère conjuguée sont donc relatifs à un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent.

13° Étant donnés une surface du second ordre φ ayant pour centre le point d et trois de ses demi-diamètres conjugués A, B, C, si une surface du second ordre φ' circonscrite à un tétraèdre conjugué à φ (ou conjuguée à un tétraèdre circonscrit à φ) rencontre ces diamètres respectivement aux points a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, on a la relation

$$\frac{A^2}{da_1 . da_2} + \frac{B^2}{db_1 . db_2} + \frac{C^2}{dc_1 . dc_2} = 1.$$

Il serait facile de multiplier davantage ces applications de nos deux théorèmes généraux; ce qui précède suffit pour montrer le parti que l'on peut en tirer.