

## **Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 5  
(1866), p. 273-284

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1866\\_2\\_5\\_273\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5_273_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTION DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 556*

(voir tome XIX, page 464),

PAR M. MERCE BUSCO.

*C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> sont trois cônes de même degré ayant leurs trois sommets sur la même droite; si C<sub>1</sub> coupe C<sub>3</sub> suivant une courbe plane, et que C<sub>2</sub> coupe C<sub>3</sub> suivant une courbe plane, C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> se couperont aussi suivant une courbe plane et les trois plans passeront par la même droite.*

(STEINER.)

On peut prendre pour plans des  $zx$  et des  $zy$  le plan de la base commune de  $C_1$  et  $C_3$  et celui de la base de  $C_2$  et  $C_3$ . Quant au plan des  $xy$  ce sera un plan *quelconque* mené par la ligne des sommets  $S_1, S_2, S_3$ . Ce plan coupe  $C_3$  suivant un système de  $m$  droites dont les coordonnées

à l'origine seront désignées par  $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$ . Soient en outre  $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3$  les coordonnées  $x, y$  des trois sommets, et  $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$  les points où les droites dont on vient de parler coupent respectivement l'axe OX et l'axe OY. Les droites  $S_3, A_1, S_2, A_1, S_1, B_1$  auront pour équations

$$y = \frac{\beta_3}{\alpha_3 - a_1} (x - a_1),$$

$$y = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - a_1} (x - a_1),$$

$$y - \beta_1 = \frac{\beta_1 - b_1}{\alpha_1} (x - \alpha_1).$$

Si entre les deux dernières on élimine le terme indépendant de  $x, y$  et que l'on tienne compte de ce que les points  $A_1, S_3, B_1$  sont en ligne droite, ainsi que  $S_1, S_2, S_3$ , on trouve

$$y = \frac{\beta_2 (\beta_1 - \beta_3)}{\alpha_1 (\beta_2 - \beta_3)} x,$$

ce qui montre que les  $m$  points obtenus d'une manière analogue en cherchant l'intersection des couples de droites  $S_2, A_2, S_1, B_2; S_2, A_3, S_1, B_3$ , etc., sont sur une même droite OD représentée par l'équation précédente. Si l'on cherche l'intersection I de cette droite avec la ligne des sommets, on trouve

$$x - \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \beta (\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2},$$

$$y - \beta_3 = \frac{\alpha_1 \beta (\beta_2 - \beta_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2};$$

d'où résulte

$$\overline{IS_3} = \frac{\alpha_1 \beta}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1} \cdot \overline{S_2 S_3}.$$

Maintenant il est facile de voir que si l'on fait tourner

le plan des  $xy$  d'un angle quelconque autour de la ligne des sommets, les  $x$  des points situés sur cette ligne se trouvent multipliés par un même facteur et les  $y$  par un autre facteur commun. D'après cela, les  $m$  points en ligne droite de l'intersection de  $C_1$  et  $C_2$  qu'on trouverait comme tout à l'heure seraient sur une droite  $O'D'$  qui rencontrerait la ligne des sommets exactement au point  $I$  où la ligne  $OD$  la rencontrerait. (Ceci résulte de la remarque précédente et de ce que  $\overline{IS_3}$  contient haut et bas les  $\alpha$  et les  $\beta$  au même degré séparément dans son expression où  $\overline{S_2 S_3}$  ne change pas.) Donc, quand le plan des  $xy$  tournera d'une manière continue autour de la ligne des sommets, chacun des  $m$  points situés sur  $OD$  décrira une branche de courbe qui ne sortira jamais du plan fixe  $ZOI$ . L'ensemble de ces branches constituera la section plane commune aux deux cônes  $C_1, C_2$ . L'intersection complète de ces surfaces s'obtiendrait en combinant chacune des droites, telles que  $S_3 A_1$ , avec chacune des autres  $S_3 B_1, S_3 B_2, S_3 B_m$ . Mais il est visible qu'à l'exception des droites où  $A$  et  $B$  ont le même indice, on n'obtiendrait pas généralement des points donnant lieu comme ci-dessus à des branches planes.

Ce procédé ne diffère pas de celui qu'on emploie dans la Géométrie descriptive pour trouver l'intersection de deux surfaces coniques *quelconques*, et il est clair que ce qu'on vient de dire peut leur être appliqué littéralement. On peut donc énoncer le théorème suivant, dont celui de Steiner doit être considéré comme un cas particulier :

*Si trois surfaces coniques ont leurs sommets en ligne droite, et que l'une d'elles rencontre chacune des autres suivant une courbe plane, ces deux dernières admettent aussi une courbe plane commune.*

*Même question;*

PAR M. VIANT.

$C_1, C_2, C_3$  sont trois cônes du même degré, ayant leurs trois sommets sur la même droite  $A_1 A_2 A_3$ ;  $C_1$  coupe  $C_2$  suivant une courbe plane  $B_3$ ;  $C_1$  et  $C_3$  se coupent suivant la courbe plane  $B_2$ ;  $C_3$  et  $C_2$  se couperont aussi suivant une courbe plane  $B_1$ , et les trois plans passeront par la même droite.

Je supposerai la figure engendrée de la manière suivante. Je décris sur  $B_3$  comme base les deux cônes  $C_1$  et  $C_3$ . Je considère une section plane  $B_2$  de  $C_1$  comme directrice du cône  $C_3$ . Je dis que la courbe de rencontre des deux cônes  $C_2$  et  $C_3$  est plane, et que son plan passe par l'intersection des plans  $B_2$  et  $B_3$ .

Supposons d'abord  $B_3$  réduit à une ligne droite;  $B_2$  et  $B_1$  seront dès lors des droites;  $B_1, B_2, B_3$  sont deux à deux dans le même plan, par suite se coupent en un même point  $O$ . Ceci suppose que ces trois lignes ne sont pas toutes les trois dans le même plan, auquel cas on pourrait considérer la figure, alors complètement plane, comme projection d'une figure dont les éléments ne seraient plus dans le même plan.

Si les cônes avaient pour bases des couples de droites, on obtiendrait deux points tels que  $O$ , et, en les joignant, on aurait une droite suivant laquelle se couperaient les trois figures planes considérées.

Cela posé, prenons le cas général. Traçons dans  $B_3$  les droites  $M_3, N_3$  et prenons le point  $P_3$  sur la courbe; à ces éléments correspondront dans  $B_2$  les droites  $M_2, N_2$  et le point  $P_2$ ; dans  $B_1$  les éléments  $M_1, N_1, P_1$ .  $P_1$ , qui est un point de la courbe  $B_1$ , appartient au plan  $(M_1 N_1)$ ; car si l'on mène par  $P_3$  une droite qui coupe  $M_2$  et  $N_2$ ,

la figure correspondante de  $B_1$  sera une droite coupant  $M_1$  et  $N_1$ . Donc tout point  $P_1$  de la courbe  $B_1$  appartient au plan  $(M_1 N_1)$ ; et d'ailleurs on sait que les trois plans  $(M_1 N_1)$ ,  $(M_2 N_2)$ ,  $(M_3 N_3)$  se coupent suivant la même droite.

On a vu que trois droites correspondantes se coupaient au même point : le même théorème devra avoir lieu pour les tangentes en trois points correspondants; et ceci n'exige pas que les courbes de rencontre soient planes.

Si les courbes sont planes, ce point décrit l'arête commune des trois plans.

---

### Question 613

(voir 2<sup>e</sup> série, t. I, p. 125);

PAR M. BAUQUENNE,

Candidat à l'École Normale.

*On donne une conique et un point fixe  $F$  dans son plan. Du point  $F$  on mène deux droites perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en deux points. On joint ces points par la droite  $\Gamma$  et l'on mène en chacun d'eux les tangentes  $\Sigma, \Sigma'$  à la conique; on projette le point  $F$  sur les trois côtés du triangle  $\Sigma\Gamma\Sigma'$ , par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence. Démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.*

(MANNHEIM.)

Le lieu du sommet  $\gamma$  d'un angle droit  $\sigma\gamma\sigma'$  circonscrit à une conique  $s$  est un cercle  $c$ .

Le cercle  $c$  et la conique  $s$  étant concentriques et la droite qui va du centre commun au point  $\gamma$  passant par le

milieu de  $\sigma\sigma'$ , le cercle décrit sur  $\sigma\sigma'$  comme diamètre passera par  $\gamma$  et sera tangent en ce point au cercle  $c$ .

Je transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un point  $F$ .

La conique  $s$  devient une conique  $S$ ,  $\sigma$  et  $\sigma'$  deviennent deux tangentes  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  à  $S$ , et  $\gamma$  devient leur corde des contacts  $\Gamma$ . L'angle  $\sigma\gamma\sigma'$  étant droit, les droites qui vont du point  $F$  aux points  $(\Sigma, \Gamma)$ ,  $(\Sigma', \Gamma)$  sont rectangulaires.

Le cercle  $c$ , lieu du point  $\gamma$ , devient une conique dont le foyer est  $F$ , enveloppe de  $\Gamma$ , dont le centre  $\omega$  est déterminé.

Le cercle qui passe par les trois points  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma'$  devient une conique ayant pour foyer  $F$  et tangente aux trois droites  $\Sigma$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma'$ , et comme ce cercle a même tangente en  $\gamma$  que le cercle  $c$ , les deux coniques transformées des deux cercles sont tangentes en un même point  $\theta$  à la droite  $\Gamma$ .

Je projette  $F$  sur les trois tangentes à la transformée de  $\sigma\gamma\sigma'$ ; soit  $p$  le point qu'on trouve ainsi sur  $\Gamma$ .

Le cercle qui passe par ces trois points  $a$ , d'après un théorème connu, pour centre le centre de la conique transformée du cercle variable, que j'appellerai  $\omega'$ .

Le cercle analogue pour la transformée de  $c$  passe aussi par  $p$  et a pour centre  $\omega$ .

Si donc les trois points  $p$ ,  $\omega$ ,  $\omega'$  sont en ligne droite, les cercles variables seront tous tangents à ce cercle fixe.

Soit  $\varphi$  le point symétrique de  $F$  par rapport à  $\Gamma$ ,  $\varphi\theta$  et  $F\omega$  se croisent au second foyer  $f$  de la conique fixe transformée de  $c$ ,  $\varphi\theta$  et  $F\omega'$  se croisent au second foyer  $f'$  de la conique variable transformée de  $\sigma\gamma\sigma'$ .

Les milieux  $p$ ,  $\omega$ ,  $\omega'$  des droites  $F\varphi$ ,  $Ff$ ,  $Ff'$  sont donc sur une parallèle à  $\varphi\theta$ , c'est-à-dire en ligne droite, ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.* — On sait que dans une transformation telle que la précédente, c'est la polaire du point  $F$  par

rapport au cercle à transformer qui fournit le centre de la conique transformée de ce cercle.

Quand trois points sont en ligne droite, leurs polaires passent par un même point.

La polaire de  $\omega$  est la polaire de  $F$  par rapport à  $c$ .

La polaire de  $\omega'$  est la polaire de  $F$  par rapport à  $\sigma\gamma\sigma'$ .

La polaire de  $p$  est la perpendiculaire en  $\gamma$  à la droite  $F\gamma$ .

Donc, dans la figure primitive, ces trois droites passent par un même point.

---

### Question 725

(voir 2<sup>e</sup> série, t. IV, p. 141),

PAR M. LEBASTEUR,

Elève ingénieur de la Marine.

*Résoudre algébriquement l'équation*

$$[(x^2 + 2)^2 + x^2]^2 = 8x^4(x + 2)^2.$$

(LEBASTEUR.)

Posons

$$(1) \quad x + 1 = y,$$

alors on a

$$(2) \quad (y^2 + 1)^3 = (y - 1)^4(y + 1)^2,$$

qui s'écrit

$$(3) \quad (y^2 + 1)^3 = (y^2 - 1)^2(y - 1)^2.$$

Je pose

$$y + \frac{1}{y} = z.$$

Divisée aux deux membres par  $y^3$ , l'équation (3) de-

vient

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 &= \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \frac{(y-1)^2}{y} \\ &= \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \left(y + \frac{1}{y} - 2\right) \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\right)^2 \left(y + \frac{1}{y} - 2\right). \end{aligned}$$

Observant que

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2,$$

on a

$$z^3 = (z^2 - 2)(z - 2)$$

ou

$$z^3 - z^2 + z - 2 = 0,$$

d'où

$$z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Or on a

$$y^2 - zy + 1 = 0,$$

$$y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

et

$$x = y - 1;$$

on a donc

$$x = \frac{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4}}{2} - 1.$$

Il faut ajouter à ceci la racine  $-1$ , que nous ne trouvons pas parce que nous avons divisé par  $y^3$  qui, dans l'hypothèse  $y = 0$ , donne  $x = -1$ .

Les racines, au nombre de cinq, sont donc

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}}{4} \sqrt{-1 - 1},$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}}{4} \sqrt{-1 - 1},$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}}{4} \sqrt{-1 - 1},$$

$$x_5 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}}{4} \sqrt{-1 - 1}.$$

On voit que la seule racine  $-1$  est réelle, les quatre autres sont imaginaires; mais il est fort remarquable que cette équation du cinquième degré soit entièrement résoluble par des équations du deuxième.

### Question 728

( voir 2<sup>e</sup> série, t. IV, p. 142 );

PAR M. VENCESLAS NIEBYLOWSKI,

Élève de spéciales au lycée Bonaparte.

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  les racines de l'équation

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

Si l'on a la relation

$$(I) \quad \begin{cases} (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\beta - \delta)^2 \\ \quad + (\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2 = 0, \end{cases}$$

démontrer que la racine  $\varepsilon$  est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation. (MICHAEL ROBERTS.)

Outre la relation donnée, on a, entre les racines et les coefficients de l'équation, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon &= -p, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon &= q, \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon \\ &+ \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon = -r, \\ \alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon &= s, \\ \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon &= -t. \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha + \beta + \gamma + \delta = -(p + \varepsilon), \\ (2) \quad & \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q + \varepsilon(p + \varepsilon), \\ (3) \quad & \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\}, \\ (4) \quad & \alpha\beta\gamma\delta = s + \varepsilon\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\}, \\ (5) \quad & \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = -\frac{t}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

En développant l'équation de condition et divisant par 2, on a

$$\begin{aligned} (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 6\alpha\beta\gamma\delta \\ - [\alpha^2(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) + \beta^2(\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta) \\ + \gamma^2(\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta) + \delta^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)] = 0, \end{aligned}$$

ou, pour simplifier l'écriture,

$$(6) \quad \sum + 6\alpha\beta\gamma\delta - \sum_1 = 0.$$

Si l'on élève (2) au carré, il vient

$$(7) \quad [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2 = \sum + 6\alpha\beta\gamma\delta + 2\sum_1.$$

Donc, en vertu de l'équation (6),

$$(8) \quad 3\sum_1 = [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2.$$

Mais si l'on multiplie (3) successivement par  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et que l'on fasse la somme des deux membres, on obtient

$$\sum_i + 4\alpha\beta\gamma\delta = (p + \varepsilon) \{ r + \varepsilon [q + \varepsilon(p + \varepsilon)] \},$$

d'où

$$3 \sum_i - 3(p - \varepsilon) \{ r + \varepsilon [q + \varepsilon(p + \varepsilon)] \} \\ - 12s - 12\varepsilon \{ r + \varepsilon [q + \varepsilon(p + \varepsilon)] \},$$

$$(9) \quad 3 \sum_i - 3(p - 3\varepsilon) \{ r + \varepsilon [q + \varepsilon(p + \varepsilon)] \} - 12s;$$

donc, en vertu de l'équation (8),

$$(10) \quad [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2 = 3(p - 3\varepsilon) \{ r + \varepsilon [q + \varepsilon(p + \varepsilon)] \} - 12s,$$

ou, en développant,

$$(11) \quad \begin{cases} 10\varepsilon^4 + 8p\varepsilon^3 + (119 - 2p^2)\varepsilon^2 \\ + (qr - pq)\varepsilon + q^2 - 3pr + 12s = 0; \end{cases}$$

or (4) et (5) nous donnent

$$(12) \quad \varepsilon^5 - p\varepsilon^4 - q\varepsilon^3 + r\varepsilon^2 + s\varepsilon - t = 0,$$

ce qui d'ailleurs est évident, puisque  $\varepsilon$  est racine de l'équation donnée.

Ainsi, en éliminant  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  entre l'équation de condition et (1), (2), (3), (4), on arrive à une équation du quatrième degré; on a donc, grâce à la relation donnée, abaissé d'une unité le degré de l'équation en  $\varepsilon$ .

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) n'étant pas toutes symétriques par rapport à  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ , il est évident que, dans les équations (11) et (12),  $\varepsilon$  désigne seulement la cinquième racine, de sorte que *ces équations ayant en commun seulement* (d'après l'élimination de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) *la racine*  $\varepsilon$ , il doit exister entre leurs premiers membres un plus grand commun diviseur du premier

degré; donc la racine  $\varepsilon$  est fonction rationnelle des coefficients de l'équation.

D'ailleurs, en exprimant que les premiers membres des équations (11) et (12) ont un plus grand commun diviseur du premier degré, on trouvera la condition qui doit exister entre les coefficients pour que la relation (I) ait lieu entre les quatre racines.

*Note du Redacteur* — Il résulte de la démonstration précédente que l'énoncé de M. Michael Roberts doit être complet par l'addition suivante : « S'il n'existe qu'un seul groupe de quatre racines qui satisfasse à l'équation (I) ». Car ce n'est qu'à cette condition que les deux équations (11) et (12) ont un seul facteur commun du premier degré et par conséquent rationnel par rapport aux coefficients. L'équation qui a pour racines les nombres  $1, 2, 3, 2 + \frac{1}{3}\sqrt{-3}, 2 - \frac{1}{3}\sqrt{-3}$  est propre à démontrer l'utilité de cette addition à l'énoncé, car les trois premières racines satisfont à la relation (I) avec l'une ou l'autre des deux dernières;  $\varepsilon$  a donc deux valeurs imaginaires dont aucune n'est une fonction rationnelle des coefficients, parce que ceux-ci sont rationnels

M. Merce Busco a résolu la question 728 à peu près de la même manière

P.

---