NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARMIER

Théorèmes sur les tétraèdres

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 268-271
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__268_1>

THÉORÈMES SUR LES TÉTRAÈDRES;

PAR M. MARMIER,
Élève de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

THÉORÈME I. — *A tout tétraèdre correspond un ellipsoïde tangent aux six arêtes du tétraèdre en leurs points milieux.*

Je rappellerai d'abord une proposition bien connue :

LEMME. — *A tout triangle correspond une ellipse tangente aux côtés en leurs points milieux.*

Soit un triangle ABC : je considère l'ellipse tangente aux deux côtés a et b du triangle, en leurs points milieux α et β, et passant par le point milieu du troisième côté c.

La droite $\alpha\beta$ est la polaire du point p par rapport à la conique. La droite qui passe par le point c et par le milieu de cette droite $\alpha\beta$ est le diamètre des cordes parallèles à $\alpha\beta$.

D'ailleurs, ce diamètre passant par le point milieu de la droite $\alpha\beta$ passe par le point milieu γ du côté c. C'est donc son extrémité ; la tangente en ce point est donc parallèle à la direction de la corde $\alpha\beta$: donc c'est le côté c.

Je considère maintenant un ellipsoïde passant par les six points milieux des arêtes du tétraèdre, et tangente à trois arêtes issues d'un même sommet.

Chacune des faces adjacentes à ce sommet A déterminera dans l'ellipsoïde une section elliptique tangente à deux côtés du triangle de la face considérée et passant par les points milieux des côtés de ce triangle; donc cette ellipse sera tangente au troisième côté de ce triangle.

Il en est de même pour les deux autres faces adjacentes au sommet A.

Donc les trois arêtes de la face opposée à ce sommet sont tangentes à l'ellipsoïde.

Les lignes joignant les points milieux des arêtes du tétraèdre se coupent, d'après un théorème connu, mutuellement en deux parties égales, et leur point de rencontre est le centre de gravité du tétraèdre; donc ce point est aussi le centre de l'ellipsoïde.

Théorème II. — *Dans un tétraèdre* ABCD, *dont les hauteurs concourent en un même point* H, *les normales élevées à chaque face par son centre de gravité se rencontrent en un même point* H_1 (*voir* 2[e] série, t. II, p. 135).

Soient α, β, γ, δ les centres de gravité des faces opposées aux sommets A, B, C, D; p, q, r, s les pieds des hauteurs correspondantes; αN, $\beta N'$, $\gamma N''$, $\delta N'''$ les normales élevées à chaque face par son centre de gravité.

La ligne $\alpha\beta$ est parallèle au côté AB. Le plan $\alpha\beta N$ est parallèle au plan des deux droites AB et AH, puisque $\alpha\beta$ est parallèle à AB et αN à Ap.

Le plan des deux droites AB, $\alpha\beta$ est donc parallèle à la droite Bq contenue dans le plan des deux droites ABH; donc, si par le point β du plan (AB, $\alpha\beta$) je mène une parallèle à la droite Bq, cette droite sera tout entière contenue dans le plan. Mais la droite Bq est perpendiculaire à la face ACD opposée au sommet B; donc la parallèle qui lui est menée par le point β sera aussi perpendiculaire à cette même face. Ce sera donc la normale $\beta N'$; donc les deux normales αN, $\beta N'$ sont situées dans un même plan. Soit H_1 leur point de rencontre. Les deux triangles semblables ABH, $\alpha\beta H_1$ donnent

$$(1) \qquad \frac{\alpha\beta}{AB} = \frac{\alpha H_1}{AH} = \frac{1}{3}.$$

Par la même raison, les normales αN et $\gamma N''$ sont situées dans un même plan; elles se rencontrent en un point H_2. Je dis que ce point se confond avec le point H_1. En effet, les deux triangles semblables $\alpha\gamma H_2$, ACH donnent la proportion

$$(2) \qquad \frac{\alpha\gamma}{AC} = \frac{\alpha H_2}{AH} = \frac{1}{3}.$$

De la comparaison des égalités (1) et (2) on tire

$$\frac{\alpha H_1}{AH} = \frac{\alpha H_2}{AH}:$$

le point H_2 se confond donc avec le point H_1.

Trois quelconques des normales élevées aux faces par leur centre de gravité concourent en un même point; elles y concourent donc toutes. C. Q. F. D.