Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__236_1>

CORRESPONDANCE.

M. Picart, à Paris. — « Vous me demandez une rectification au théorème sur les lignes géodésiques des surfaces gauches, que j'ai énoncé dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, et que vous avez reproduit dans le numéro de décembre des *Nouvelles Annales*.

» Je m'empresse de vous fournir quelques explications sur ce sujet.

» Ayant appris de M. O. Bonnet qu'il venait de démontrer que *lorsque deux surfaces gauches sont applicables l'une sur l'autre, les génératrices rectilignes de ces surfaces sont nécessairement des lignes homologues*, je cherchai de mon côté une démonstration de ce théorème remarquable qui comblait une lacune dans la théorie de la déformation des surfaces gauches. Voici la méthode que je suivis. Comme, dans la déformation d'une surface quelconque, la courbure géodésique des lignes tracées sur cette surface et la courbure de la surface elle-même en chacun de ses points ne sont pas altérées, je me proposai de voir s'il existe sur une surface gauche des systèmes de lignes géodésiques le long desquelles la courbure de la surface suive la même loi que le long des génératrices rectilignes. J'arrivai à une équation qui me donnait, en chaque point, deux directions de lignes géodésiques satisfaisant à cette condition. Partant alors de ce fait, que sur les surfaces gauches du deuxième degré il y a bien deux systèmes de lignes géodésiques semblables, savoir les deux systèmes de génératrices rectilignes, et poussé par un besoin trop prompt de généralisation, je me hasardai à conclure (sous toutes réserves) que ces deux systèmes de lignes géodésiques existaient sur une surface gauche quelconque. Je fis part de ma méthode en même temps que de mes doutes à la Société Philomathique en février 1864. M. O. Bonnet était présent. Au sortir de la séance, il me fit la remarque que l'analyse devait, en effet, indiquer généralement deux directions de lignes géodésiques remplissant la condition ci-dessus énoncée, puisque ces deux directions existent sur les surfaces gauches provenant de la déformation des surfaces du second degré; mais que l'une de ces directions, pour être acceptable, était soumise à des équations de condition qui précisément imposent à la surface gauche la nécessité d'être applicable sur une surface du deuxième degré. Je reconnus bien vite la justesse de l'observation de M. Bonnet, et, pour la confirmer, je me mis à chercher les relations qui doivent exister entre les *paramètres différentiels* d'une surface gauche pour que cette surface soit doublement réglée. Je trouvai ainsi trois équations encore inédites qui me permirent de faire la vérification désirée.

» Ne pouvant assister à la séance suivante de la Société Philomathique, je priai M. Bonnet de vouloir bien présenter lui-même la rectification du théorème général que j'avais communiqué sous toutes réserves. Depuis lors, je ne m'en suis plus occupé, et grande fut ma surprise d'apprendre par vous, Monsieur, que l'énoncé de ce théorème avait été inséré dans votre estimable journal. Veuillez croire que si je m'en étais aperçu plus tôt, je me serais empressé d'aller au-devant de votre démarche, et de vous fournir spontanément les explications rectificatives que vous m'avez demandées.

» *P. S.* — Permettez-moi, Monsieur, à cette occasion, de vous communiquer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface gauche soit doublement réglée.

» Si l'on désigne par dp la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et par $d\omega$ leur angle, par dp' et $d\omega'$ les éléments analogues de la surface gauche conjuguée (c'est-à-dire de la surface formée par les perpendiculaires communes aux génératrices successives), ces conditions sont exprimées par les équations suivantes :

$$(1) \qquad 2\frac{d\omega}{dp}\cdot\frac{d^2\omega'}{dp^2}+\frac{d\omega'}{dp}\frac{d^2\omega}{dp^2}=0,$$

$$(2) \quad 4\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^4-3\left(\frac{d^2\omega}{dp^2}\right)^2+4\frac{dp'}{dp}\frac{d\omega'}{dp}\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^3+2\frac{d\omega}{dp}\frac{d^3\omega}{dp^3}=0,$$

$$(3) \qquad 2\left(\frac{d\omega}{dp}\right)^2\frac{d^2p'}{dp^2}+\left(\frac{dp'}{dp}\frac{d\omega}{dp}-4\frac{d\omega'}{dp}\right)\frac{d^2\omega}{dp^2}=0\ (*),$$

(*) Les quantités $\frac{d\omega}{dp}$, $\frac{d\omega'}{dp}$, $\frac{dp'}{dp}$ sont ce que j'appelle les *paramètres différentiels* de la surface gauche.

ou, en posant

$$\frac{d\omega}{dp} = k, \quad \left(\frac{d\omega'}{dp}\right)^2 = u, \quad \frac{dp'}{dp} = v,$$

et intégrant,

$$(1') \qquad k = \frac{m}{u},$$

$$(2') \qquad p = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{-u^3 + au^2 + bu - m^2}},$$

$$(3') \qquad v = \frac{(a - 2u)\sqrt{u}}{m},$$

a et b étant deux constantes.

» Si l'on remarque que v est la cotangente de l'angle i sous lequel la ligne de striction coupe la génératrice, cette dernière équation peut s'écrire

$$(3'') \qquad \cot i = \frac{(a - 2u)\sqrt{u}}{m}.$$

» De là on déduit la définition générale des surfaces réglées applicables sur les surfaces gauches du second degré. Elle est fournie par les équations (2′), (3′) dans lesquelles u est remplacé par $\frac{m}{k}$, et qui deviennent ainsi

$$(4) \quad 2p + \int \frac{dk}{\sqrt{k(-k^3 + b'k^2 + ak - m)}} = 0 \quad \left(b' = \frac{b}{m}\right),$$

$$(5) \qquad v = \frac{ak - 2m}{k\sqrt{mk}}.$$

» Dans le cas où la constante m est nulle, c'est-à-dire où la surface est un paraboloïde, ces deux formules doivent être remplacées par

$$k = \frac{n}{v^4}, \tag{6}$$

$$cp = \sqrt{cv^2 - n^2} + d, \tag{7}$$

n, c et d étant trois nouvelles constantes.

» On peut déduire de ces formules diverses conséquences géométriques intéressantes. »