NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T.-A. HIRST

Sur la transformation quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 213-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__213_1>

SUR LA TRANSFORMATION QUADRIQUE (*);

PAR M. T.-A. HIRST.

M. Transon, dans le numéro de février dernier des *Nouvelles Annales*, a très-justement observé que la méthode de l'inversion quadrique et celle de la projection gauche sont essentiellement distinctes. Cependant, les deux méthodes sont des cas particuliers de la transformation qui a été d'abord étudiée analytiquement par Magnus, dans le VIII^e volume du *Journal de Crelle*, et géométriquement, par moi-même, dans un Mémoire inédit communiqué en septembre dernier à l'*Association Britannique*. D'abord Magnus a supposé à tort que sa méthode de transformation était la plus générale de celles dans lesquelles à un point de l'un des systèmes correspond un seul point de l'autre. Les recherches subséquentes de Cremona, de Jonquières, Clebsch et Cayley ont montré que cela n'a pas lieu : la transformation de Magnus est seulement la plus générale de celles mentionnées plus haut, pour lesquelles *à chaque ligne droite cor-*

(*) *On the quadric transformation.*

respond une conique. Toutes les coniques qui, dans la méthode de la *transformation quadrique*, correspondent aux lignes droites de l'un ou de l'autre système, passent nécessairement par trois points nommés par Magnus *points principaux* de la transformation. Je me propose, après avoir donné la plus simple définition de la transformation quadrique, de montrer comment, en plaçant d'une manière convenable les points principaux, elle devient identique, d'une part, avec la méthode de la projection inverse proposée et développée, il y a quarante-quatre ans, par Steiner, dans son célèbre ouvrage *Systematische Entwickelung, etc.*, et récemment reproduite par M. Transon qui, sans aucun doute, y était conduit par ses propres recherches; et, d'autre part, avec la méthode de l'inversion quadrique qui, comme je l'ai observé ailleurs, a été suggérée par Bellavitis.

1. Pour établir une correspondance entre les divers points d'un plan, prenons deux couples de points B, B′ et C, C′, et considérons-les comme les sommets de deux couples de faisceaux homographiques [B], [B′] et [C], [C′]. Alors à chaque point P, considéré comme l'intersection de deux rayons BP, CP des deux faisceaux [B], [C] correspondra un point unique déterminé par l'intersection des deux rayons correspondants B′P′, C′P′ des faisceaux [B′], [C′], respectivement homographiques à [B] et [C].

2. Si à la ligne BC, considérée comme rayon commun des faisceaux [B] et [C], correspond dans les faisceaux [B′] et [C′] la ligne B′C′, la correspondance entre les points P et P′ sera simplement l'homographique, telle que l'a définie M. Chasles dans la *Géométrie supérieure*. Mais si à BC correspondent les rayons B′A′ et C′A′ dans les faisceaux [B′] et [C′], et que sembla-

blement à $B'C'$ correspondent BA et CA dans [B] et [C], le mode de correspondance entre les points P et P′ sera identique à celui considéré par Magnus. J'appellerai A, A′; B, B′; C, C′ les trois couples de points *homologues* principaux.

3. Ces points sont exceptionnels en ce que chacun a un nombre infini de points correspondants. Au point A, par exemple, correspond un point quelconque de $B'C'$, et au point A′ un point quelconque de BC. En outre, à chaque point de BA correspond, comme on peut le voir facilement, le point C′, et ainsi de suite. Bref, *à chaque point situé sur une ligne principale correspond l'homologue du point principal opposé, et* vice versâ.

4. Réciproquement, *à une droite de chaque système correspond, en général, une conique qui passe par les points principaux de l'autre système.* Car nous pouvons regarder toute ligne droite L comme le lieu de l'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques [B] et [C], qui ont un couple de rayons correspondants qui coïncident avec BC. Les faisceaux correspondants [B′] et [C′] seront alors aussi homographiques, et $B'A'$, $C'A'$ seront un couple de rayons correspondants, qui, par conséquent, engendrent une conique [S′], passant par les points A′, B′, C′. Semblablement, à chaque droite L′ correspondra une conique [S] passant par A, B, C, et réciproquement à chaque conique passant par les trois points principaux de l'un des systèmes correspondra une ligne droite dans l'autre système.

5. Plus généralement, si n et n' désignent l'ordre de deux courbes correspondantes, a et a', b et b', c et c', respectivement, les nombres de fois qu'elles passent par A et A′, B et B′, C et C′, on pourra facilement établir

les relations symétriques suivantes.

$$a' = n - b - c, \qquad a = n' - b' - c',$$
$$b' = n - c - a, \qquad b = n' - c' - a',$$
$$c' = n - a - b, \qquad c = n' - a' - b',$$
$$n' = 2n - (a + b + c); \qquad n = 2n' - (a' + b' + c').$$

6. En général, il y a seulement quatre points du plan tels, que chacun d'eux coïncide avec son correspondant. On peut démontrer comme il suit l'existence de ces points doubles. Je prends un point P comme centre d'un faisceau de rayons [P] : ce dernier sera manifestement homographique au faisceau des coniques correspondantes [A', B', C', P'] (4), et le lieu des intersections des éléments correspondants des deux faisceaux sera une cubique [C] passant par A', B', C', P', P, qui peut être définie *le lieu des points du second système qui sont situés, avec leurs correspondants, sur des lignes qui convergent au point* P. A tout point de convergence P_1 sera de même associée une autre cubique [C_1] qui coupera [C] aux trois points principaux A', B', C' et aux deux points du second système situés, avec leurs correspondants, sur la ligne PP_1. Les quatre intersections qui restent seront les quatre points doubles demandés, autrement chacun serait situé avec son correspondant sur une ligne qui passe par P aussi bien que par P_1, ce qui est impossible.

7. Il doit être observé que les trois couples de points homologues principaux étant donnés, la transformation est parfaitement déterminée dès que l'on connaît un seul couple de points correspondants. Je signalerai brièvement quelques cas spéciaux.

Chacun des points principaux A, A' *est situé sur la ligne principale opposée à son homologue* A', A : alors, puisque chacun des points A et A′ coïncide avec un de ses points correspondants (3), il est manifeste que s'il en est de même d'un autre point de AA′ (et la supposition est permise), chaque point de AA′ coïncidera avec son point correspondant. De plus, chacune des lignes BB′ et CC′, regardée comme une des lignes de l'un ou de l'autre système, coïncidera avec la ligne correspondante, en sorte que leur point d'intersection D coïncidera avec son correspondant. En fait, la cubique (C), lieu de tous les points du second système situés, avec leurs correspondants, sur des droites qui convergent vers un point P (6), se décompose dans la ligne droite AA′ et la conique (B′C′PP′). De même, la cubique (C_1), associée à un autre point P_1, se compose de la droite AA_1 et de la conique ($B'C'P_1P'_1$), et, ces coniques se coupant en B′, C′ et en un point de PP_1, elles passent par D. Ce cas de la transformation quadrique coïncide évidemment avec la projection gauche de Steiner, pourvu que, ainsi que M. Transon l'a observé, on fasse coïncider le plan de projection avec le plan de la figure primitive.

8. D'autres cas spéciaux dignes de remarque naissent de l'hypothèse de la *coïncidence des deux triangles principaux*; cette coïncidence peut arriver de plusieurs manières.

1° *En chaque sommet de deux triangles principaux deux points homologues principaux coïncident.*

C'est-à-dire que A coïncide avec A′, B avec B′, et C avec C′. Il est manifeste que les quatre points doubles D_1, D_2, D_3, D_4 forment alors un quadrilatère dont les côtés opposés se rencontrent aux sommets du triangle principal; car ces points doubles sont sur les rayons doubles de chacun des trois couples de faisceaux concentriques et homographiques [A], [A′]; [B], [B′]; [C], [C′]. De plus, on voit facilement que les polaires d'un point P relativement aux diverses coniques du faisceau [D_1, D_2, D_3, D_4] passent par le point correspondant P'. Ce cas spécial de la transformation quadrique est connu depuis longtemps. Salmon, Beltrami, Bellavitis, le professeur Newton (de l'Amérique) et d'autres l'ont étudié.

2° *En un seul sommet du triangle principal coïncident deux points homologues principaux.*

Que A coïncide avec A', B avec C' et C avec B', (B'C) et (BC') sont maintenant des points doubles, et AB, AC sont les rayons doubles des faisceaux homographiques [A], [A']; si nous supposons qu'un autre rayon du faisceau [A] coïncide avec son correspondant dans [A'], tous les faisceaux correspondants coïncident, et nous aurons le cas de l'inversion quadrique. Sur chaque rayon mené par le point (AA'), les points correspondants P, P' formeront une involution, et les points doubles de ces diverses involutions seront sur une conique qui touche les droites AB, AC en B et C. C'est la conique fondamentale F de l'inversion quadrique, et P, P' sont relativement à elle des points conjugués. Les cubiques (C) et (C_1), associées à deux points P, P_1, se décomposent dans la conique F et les lignes droites PA, P_1A. Les points de la conique F sont donc les seuls points doubles.

3° *En aucun sommet du triangle principal ne coïncident deux points homologues principaux.*

Cette méthode, où, par exemple, A et C', B et A', C et B' coïncident, n'a pas, que je sache, été étudiée jusqu'à présent. Je n'ai point l'intention de l'étudier ici; je remarquerai simplement que des quatre points doubles trois coïncident avec les sommets du triangle principal.