NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE ROUCHÉ

Démonstration nouvelle d'un théorème de Gauss relatif aux séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 10-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__10_1>

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME DE GAUSS RELATIF AUX SÉRIES;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

Une série à termes positifs est convergente, lorsque le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

d'un terme au précédent reste, à partir d'un certain rang, inférieur à un nombre fixe moindre que l'unité; elle est divergente si ce rapport reste, à partir d'un certain rang, supérieur à l'unité. Mais on ne peut rien affirmer lorsque le rapport considéré, ayant l'unité pour limite, ne finit pas par rester toujours au-dessus de sa limite.

Gauss a donné pour lever ce doute une règle très-simple relative au cas où le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

s'exprime par une fraction rationnelle de n. Ce cas, très-fréquent dans la pratique, n'est pas si particulier qu'on le croirait à première vue, si l'on oubliait de remarquer qu'il n'est nullement question ici des valeurs de u_n et de u_{n+1}, mais seulement de leur rapport.

Puisque ce rapport a, par hypothèse, l'unité pour limite, le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle qui l'exprime doivent être des polynômes ayant même degré et même premier terme; et dès lors, en divisant haut et bas par le coefficient de ce premier terme, on voit que le rapport considéré doit être de la forme

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

λ étant entier et positif.

Cela posé, voici à quoi se réduit, en dernière analyse, le théorème de Gauss :

Pour qu'une série U, *telle que le rapport d'un terme au précédent a la forme* (1), *soit convergente, il faut et il suffit que la différence* $A - a$ *soit plus grande que l'unité.*

En raison de sa simplicité et de son utilité pratique, cette règle devrait figurer dans les Éléments. Mais la démonstration de Gauss, bien qu'elle ne repose que sur des principes faciles (*voyez* le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand), offre une certaine longueur qui explique peut-être pourquoi ce théorème n'est pas plus répandu. Voici une démonstration très-simple que quelques collègues m'ont engagé à publier.

I.

Commençons par établir un lemme, qui n'est au fond qu'un cas particulier du théorème général :

p étant un nombre fixe, entier et positif, la série V, telle, que le rapport d'un terme au précédent s'exprime par la formule

$$(2)\qquad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{n-p-x}{n-p+1},$$

est convergente lorsque x est positif, et divergente lorsque x est nul ou négatif.

En effet :

D'abord, pour $x=0$, la série, ne différant pas de la série harmonique, est divergente

Supposons donc x différent de zéro. La relation (2) donne

$$xv_n=(n-p)\,v_n-(n+1-p)\,v_{n+1}.$$

En changeant successivement n en $n-1$, $n-2,\ldots, p$, ajoutant et désignant par S_n la somme

$$v_p+v_{p+1}+\ldots+v_n,$$

on trouve

$$x.S_n=-(n+1-p)\,v_{n+1},$$

ou, en exprimant v_{n+1} en fonction de v_p à l'aide de la relation (2),

$$x.S_n=-(n+1-p)\,v_p\,\frac{(-x)(1-x)(2-x)\ldots(n-p-x)}{1.2.3\ldots(n-p+1)},$$

d'où

$$S_n=v_p(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n-p}\right).$$

Or, à mesure que n croît de plus en plus, cette somme tend évidemment vers zéro lorsque x est positif et croît indéfiniment lorsque x est négatif. Donc, etc.

II.

Cela posé, pour démontrer la règle de Gauss, il nous suffira de comparer les séries U et V, à l'aide de ce théorème bien connu :

Si une série V *est convergente et qu'on ait, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série U *sera convergente; et si, la série* V *étant divergente, on a, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série U *sera divergente.*

Considérons donc le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} : \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^{\lambda+1} + (a-p+1)\,n^{\lambda} + (b - pa + a)\,n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + (\mathrm{A} - p - x)\,n^{\lambda} + (\mathrm{B} - p\mathrm{A} - \mathrm{A}x)\,n^{\lambda-1} + \ldots}$$

ou

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{u_{n+1}}{u_n} : \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &= 1 - \frac{(\mathrm{A} - a - 1 - x)\,n^{\lambda} + [\mathrm{B} - b - a + \mathrm{A}x - p(\mathrm{A} - a)\,n]^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Désignons la dernière fraction par R et distinguons trois cas, suivant que la quantité

$$A - a - 1$$

est positive, négative ou nulle.

Dans le premier cas, laissons arbitraire le nombre entier et positif p, et prenons pour x un nombre positif inférieur à

$$A - a - 1.$$

A partir d'une certaine valeur de n, on aura alors évidemment $R > 0$, le rapport (3) sera donc moindre que 1; et comme, x étant positif, la série V est convergente, la série U le sera aussi.

Dans le second cas, laissons encore p arbitraire et prenons x égal à zéro. A partir d'une certaine valeur de n, on aura alors $R < 0$; le rapport (3) sera donc plus grand que 1; et comme, x étant nul, la série V est divergente, la série U le sera aussi.

Enfin, dans le dernier cas, prenons x égal à zéro, nous aurons

$$R = \frac{(B - b - a - p)\, n^{\lambda - 1} + \ldots}{n^{\lambda + 1} + \ldots}.$$

Si donc nous prenons pour p un nombre entier et positif supérieur à

$$B - b - a,$$

nous aurons, à partir d'une certaine valeur de n, $R < 0$; le rapport (3) sera donc supérieur à 1; et comme, x étant nul, la série V est divergente, la série U le sera aussi.