

J.-CH. DUPAIN

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 454-455

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__454_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Trouver les racines réelles de l'équation $a^x + b^x = c^x$ dans laquelle a, b, c sont des nombres positifs.

Je remarque d'abord que si les trois nombres a, b, c sont plus petits que l'unité, $+\infty$ est une solution de l'équation; de même $-\infty$ serait une solution si les trois nombres étaient plus grands que l'unité.

Lorsque $a = b$, l'équation peut se résoudre immédiatement; en effet,

$$2a^x = c^x, \quad x = \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Lorsque a diffère de b , on peut supposer $a > b$, ce qui donne lieu à trois cas.

Premier cas : $c > a > b$. — Je divise les deux membres de l'équation par c^x , en tenant compte, s'il y a lieu, de la solution infinie donnée par $c^x = 0$, et j'ai

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1;$$

$\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont plus petits que l'unité; le premier membre est une fonction constamment décroissante, égale à 2 quand x est nul, et nulle quand x est infini; il y a donc une seule racine qui est positive. On la sépare facilement en remarquant que

$$2\left(\frac{a}{c}\right)^x > 1, \quad 2\left(\frac{b}{c}\right)^x < 1,$$

d'où

$$\frac{\log 2}{\log c - \log b} < x < \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Deuxième cas : $c < b < a$. — On reconnaît par le même moyen l'existence d'une seule racine qui est négative.

Troisième cas : $a > c > b$. — Il n'y a pas de racine réelle, car pour toute valeur positive de x

$$a^x > c^x, \text{ et à fortiori } a^x + b^x > c^x;$$

pour toute valeur négative de x ,

$$b^x > c^x, \text{ et à fortiori } a^x + b^x > c^x.$$

Remarque. — Cette question a été posée le 30 mars 1865, à Poitiers, aux candidats pour le baccalauréat ès sciences : il serait superflu de s'enquérir si elle a été résolue.

Remarque. — Le nombre des racines imaginaires sera en général infini et leur recherche compliquée; nous nous contenterons d'un exemple très-simple. Soit

$$a = me^2, \quad b = me, \quad c = m;$$

e étant la base des logarithmes népériens,

$$e^{2x} + e^x = 1, \quad e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = l. \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$$

On voit que x a une infinité de valeurs imaginaires et une seule valeur réelle.