NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Note sur les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 311-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__311_1>

NOTE SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. On connaît ce théorème : *Si une droite est asymptote d'une branche de courbe algébrique, elle l'est également d'une seconde branche* (NEWTON). Les lecteurs des *Nouvelles Annales* peuvent connaître aussi la démonstration qu'en a donnée M. A. Serret (1847, p. 217). A l'aide d'une courbe auxiliaire, l'auteur ramène le théorème à cet autre : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point d'arrêt*. Réduction évidente d'ailleurs, *à priori*; les deux théorèmes n'en faisant qu'un, ainsi qu'on le voit par la perspective. Car si une courbe algébrique pouvait offrir un point d'arrêt : la projection de cette courbe, faite de manière à emporter ce point à l'infini, serait algé-

brique, comme la proposée, et présenterait une seule branche asymptote de la droite suivant laquelle se projette la tangente au point d'arrêt. Réciproquement, s'il pouvait exister dans le plan d'une telle courbe une droite asymptote d'une branche unique : la trace, sur un plan de projection quelconque, d'une parallèle à l'asymptote menée par le point de vue, serait un point d'arrêt de la courbe projetée.

2. Il reste à établir ce second théorème : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point d'arrêt*; et c'est ce que l'on peut faire comme il suit.

Soit OA une branche de courbe faisant partie d'une ligne algébrique du degré m, et présentant un point d'arrêt à l'origine O.

Si autour du point O comme centre, avec un rayon quelconque, nous décrivons un cercle; nous pourrons déduire, des équations

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

du cercle et de la courbe, une combinaison homogène du degré $2m$

$$\varphi_{2m}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \tag{3}$$

représentant le système des droites menées de l'origine à chacun des $2m$ points, réels ou imaginaires, communs au cercle et à la courbe. D'ailleurs, si le rayon du cercle (1) est suffisamment petit, et si l'origine O pouvait être un point d'arrêt de la courbe (2); le cercle et la courbe auraient un seul point réel commun : et l'équation (3) elle-même, de *degré pair* en $\frac{y}{x}$, admettrait une seule racine réelle; ce qui serait absurde.

3. Des considérations semblables s'appliqueraient au théorème suivant : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point anguleux ;* mais on peut aussi l'établir de cette manière.

Un point anguleux peut être considéré comme résultant de la réunion de deux points d'arrêt en un seul, les tangentes relatives à ces points demeurant distinctes après leur réunion. Or, si une courbe algébrique pouvait offrir un tel point : la projection de cette courbe, faite de manière à emporter ce point à l'infini, présenterait deux droites (les projections des deux tangentes relatives au point anguleux) asymptotes, l'une et l'autre, d'une seule branche de courbe. Donc, etc.