NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Bibliographie

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 3 (1864), p. 87-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__87_0>

## BIBLIOGRAPHIE

(voir p. 42).

MAXIMILIEN MARIE. — *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* (Fin.)

M. Marie a appliqué ce mode de représentation des équations à plusieurs questions, notamment à l'étude des périodes des intégrales et à celle des conditions de convergence de la série de Taylor. La méthode s'adapte tellement bien au premier de ces deux sujets, qu'elle semblerait avoir été créée exprès. Certaines intégrales ont une période réelle (celle qui exprime la surface d'un segment de cercle, par exemple), d'autres une période imaginaire $\left(\text{exemple, } \int \frac{dx}{x}\right)$, d'autres les deux espèces de périodes à la fois. L'explication des périodes réelles est très-simple : ces périodes ne sont autre chose que l'aire de la courbe fermée dont l'intégrale en question exprime la quadrature (*). La méthode de M. Marie fournit avec une égale facilité l'explication des périodes imaginaires : elles sont les aires des anneaux fermés de conjuguées compris entre deux branches de la courbe réelle, ou la somme d'un anneau de la courbe réelle et d'un anneau de la conjuguée. On obtient ainsi une méthode plus simple que toute autre pour évaluer ces périodes, et l'on constate en même temps deux théorèmes intéressants : l'un, c'est que les aires des anneaux fermés de conjuguées compris entre deux branches consécutives de la courbe réelle sont égales

(*) Les aires limitées par des branches infinies peuvent se ramener par des transformations de variables à des aires fermées.

entre elles ; l'autre, c'est que les intégrales $\int y dx$ et $\int x dy$, $y$ et $x$ étant liés par une équation $f(x, y) = 0$, ont les mêmes périodes. Nous supposons écartées les difficultés concernant les fonctions qui ont plus de deux périodes. Ce dernier théorème a été démontré aussi, ou peu s'en faut, dans l'école de Cauchy ; mais ce grand géomètre ne l'avait pas encore entrevu quand il dut faire un Rapport à l'Académie des Sciences sur les travaux de M. Marie.

Le lecteur s'apercevra, sans que nous ayons besoin de le lui faire remarquer, que cette méthode promet de grandes ressources pour l'étude des fonctions définies par des équations différentielles à deux variables, que ces fonctions soient ou non réductibles aux fonctions doublement périodiques, tandis que la méthode de Cauchy appliquée par MM. Puiseux, Briot et Bouquet ne paraît guère avoir de puissance quand il s'agit d'aborder les fonctions plus compliquées que les fonctions doublement périodiques. Enfin cette méthode permet de découvrir quelque chose concernant les périodes des intégrales doubles et multiples, sujet qui avait résisté à Cauchy. Les périodes des intégrales doubles sont des volumes réels ou imaginaires, de même que celles des intégrales simples sont des aires. Cependant une indétermination d'un autre ordre pèse sur les intégrales doubles ; c'est un point pour lequel nous renvoyons au Mémoire de notre auteur et qui demande bien des éclaircissements.

La méthode de M. Marie s'applique moins heureusement à la recherche des conditions de convergence de la série de Taylor. Elle ne devient utilisable qu'au moment où celle de Cauchy cesse de l'être, et alors même elle est loin de satisfaire à toutes les exigences. Cauchy n'a en somme démontré relativement à la série de Taylor qu'une seule chose qui mérite mention : c'est que cette série est *nécessairement* convergente (*) tant que la variable $x$, par rapport aux puissances de laquelle le développement est ordonné, conserve un module inférieur à tous ceux de certaines valeurs de $x$ *dangereuses* ou plutôt *suspectes*; mais il ne donne aucun moyen de discerner parmi ces valeurs suspectes celles qui sont réellement dangereuses dans chaque cas déterminé, et il range même parmi les valeurs suspectes des valeurs qui ne le sont nullement. C'est ce que M. Marie fait très-bien voir, mais il n'a lui-même qu'une méthode précaire pour discerner ces valeurs dangereuses, méthode qui ne conduit à aucune règle générale certaine. M. Marie suppose cependant une règle qui se vérifie dans tous les cas particuliers, très-simples à la vérité, qu'il a examinés : de tous les points suspects le plus immédiatement dangereux serait l'un des deux points critiques dont les conjuguées comprennent entre elles le point origine où l'on a transporté les axes pour faire le développement suivant la série de Mac-Laurin. Cet énoncé convient pour le moins au cas où les points suspects appartiennent à une même branche de la courbe réelle.

Mais le problème que se propose ici M. Marie n'a peut-être pas toute l'importance que l'on croirait; la plupart du temps on pourra, quand le nombre des points suspects ne sera pas infini, les éviter tous assez simplement sans distinguer ceux qui sont réellement dangereux de ceux qui ne le sont pas (**).

---

(*) L'origine de ce théorème de Cauchy est dans la *Théorie des fonctions génératrices* de Laplace, ouvrage dans lequel l'expression d'un coefficient de la série de Taylor est déjà donnée en intégrale définie; il y avait peu à faire ensuite pour trouver l'expression du reste. De là une démonstration du théorème de Cauchy plus claire que toutes celles qu'il en a données. C'est ce que nous nous proposons de faire voir dans une des prochaines livraisons des *Nouvelles Annales*.

(**) Développez $f(x)$ par rapport aux puissances de $\frac{x}{x+n}$, $n$ étant un

M. Marie considère dans le reste de sa série de Mémoires les lois qui régissent la courbure des conjuguées et de leur enveloppe, ainsi que la manière de représenter graphiquement les angles imaginaires à centre réel ou imaginaire et les triangles imaginaires. Ce sont des théories élégantes, faciles à comprendre, et qui, par cela même qu'elles sont simples, devront rencontrer des applications; mais nous ne voyons, quant à présent, aucune raison pour y insister dans ce compte rendu.

N. Landur.