NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. DE TRENQUELLÉON

Sur l'intersection de deux cônes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 539-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__539_1>

SUR L'INTERSECTION DE DEUX CONES;

PAR M. CH. DE TRENQUELLÉON,
Élève de l'École Normale.

THÉORÈME I. — *L'intersection de deux cônes circulaires droits, dont le second a son sommet dans le plan de la base du premier, son axe parallèle à celui du premier et la même hauteur que le premier, se projette sur le plan de la base suivant un ovale de Descartes.*

Considérons, en effet, un point M de cette intersection; par ce point menons un plan parallèle aux plans des bases. Si l'on désigne par r et r' les rayons des deux parallèles, par R et R' les rayons des deux bases, par h la distance du sommet A du premier cône au parallèle et par H la hauteur commune des deux cônes, il viendra

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}, \quad \frac{r'}{R'} = \frac{H-h}{H};$$

en ajoutant, il vient

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = 1;$$

la projection est donc un ovale de Descartes dont les foyers sont le centre de la base du premier cône et le sommet du second.

En employant une méthode analogue à celle que nous venons d'indiquer pour prouver le théorème I, on établira la proposition suivante :

Théorème II. — *L'intersection de deux cônes circulaires droits, dont les bases sont dans le même plan et dont les hauteurs sont différentes, se projette sur le plan des bases suivant un ovale de Descartes.*

Théoreme III. — *L'enveloppe d'une série d'ovales de Descartes, dont l'un des foyers* A *reste fixe et dont l'autre se meut suivant une ligne droite* MN (*les autres paramètres de l'équation de la courbe restant constants*), *se compose de deux coniques.*

D'après le théorème I, l'enveloppe cherchée sera la projection sur le plan MNA de l'intersection d'un cône circulaire droit C, dont la base a pour centre le point A et un rayon convenablement choisi, avec l'enveloppe d'une série de cônes circulaires droits C_1, ayant pour sommets les différents points de la ligne MN, des axes parallèles à celui du cône C et un angle au sommet déterminé. L'enveloppe des cônes C_1 se composant de deux plans passant par la ligne MN et inclinés sur le plan MNA d'un angle complémentaire de celui des cônes C_1, l'enveloppe cherchée se compose à son tour de deux coniques.

Théorème IV. — *L'enveloppe d'une série d'ovales de Descartes, dont l'un des foyers* A *reste fixe et dont l'autre se meut suivant un cercle* O (*les autres paramètres de l'équation de la courbe restant constants*), *se compose de deux ovales de Descartes ayant pour foyers les points* O et A.

Le théorème I nous montre que l'enveloppe cherchée est la projection sur le plan du cercle O de l'intersection d'un cône circulaire droit C, dont la base a pour centre le point A et un rayon déterminé, avec l'enveloppe d'une série de cônes circulaires droits C_1, ayant pour sommets les différents points du cercle O, des axes parallèles à celui du cône C et un angle au sommet déterminé. Or, l'enveloppe des cônes C_1 se compose évidemment de deux cônes symétriques par rapport au plan du cercle O, ayant pour base commune le cercle O et pour angle au sommet l'angle des cônes C_1. L'enveloppe des ovales de Descartes satisfaisant aux conditions de l'énoncé se compose donc de deux ovales de Descartes ayant pour foyers les points O et A.