MOUTARD

Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 536-539

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__536_1>

SUR LES SURFACES ANALLAGMATIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. MOUTARD.

I (**).

La ligne d'intersection de chaque *surface directrice* et de la *sphère principale* correspondante est une *ligne focale* de la surface anallagmatique.

Cette ligne, en effet, peut être considérée comme le lieu

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 453, et t. IX, p. 5.

(**) Cette Note a été présentée à la Société Philomathique le 30 juillet 1864; elle fait suite à l'article inséré dans ce volume (p. 306).

Ce premier article, que nous avions extrait du journal *l'Institut*, a été présenté à la Société Philomathique le 14 mai 1864.

des centres des sphères, de rayon nul, doublement tangentes à la surface; ou, ce qui revient au même, comme une ligne double de la développable circonscrite à l'anallagmatique et au cercle de l'infini.

Lorsque deux surfaces anallagmatiques ont en commun une ligne focale, elles ont les cinq mêmes pôles principaux et les cinq mêmes lignes focales; elles sont dites homofocales.

Deux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre homofocales se coupent partout à angle droit; leur ligne d'intersection est une ligne de courbure de chacune des surfaces.

Par tout point de l'espace il est possible de faire passer trois surfaces anallagmatiques du quatrième ordre ayant une ligne focale donnée. Pour en obtenir les directrices, il suffit de construire les trois surfaces du second ordre, qui contiennent la ligne focale et sont tangentes au plan, lieu des points de même puissance par rapport à la sphère principale et au point donné.

De tout cela il résulte que les anallagmatiques homofocales du quatrième ordre forment un système triplement orthogonal.

II (*).

Parmi les cinq surfaces directrices homofocales d'une surface anallagmatique donnée du quatrième ordre, il y a toujours un hyperboloïde à une nappe, il peut y en avoir trois.

Considérons le quadrilatère formé par quatre génératrices rectilignes de l'un de ces hyperboloïdes et les sphères doublement tangentes à l'anallagmatique ayant leurs centres aux sommets de ce quadrilatère. La surface anallagma-

(*) Ce qui suit a eté presenté a la Société Philomathique dans la séance du 6 août 1864. Nous l'avons extrait du journal *l'Institut*.

tique peut être considérée comme le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à deux sphères opposées (dont les centres sont deux sommets opposés du quadrilatère dont il vient d'être question) est dans un rapport constant, positif ou négatif, avec le produit des puissances par rapport aux deux autres sphères (*).

Ce rapport constant est égal à celui des segments déterminés par le centre de la surface directrice sur la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère. La sphère principale n'est autre, du reste, que la sphère orthogonale aux quatre sphères données.

En particularisant le quadrilatère, on arrive à diverses définitions de l'anallagmatique parmi lesquelles nous citerons celle-ci :

Une anallagmatique du quatrième ordre peut, en général, être définie de dix manières différentes comme le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances à deux plans fixes.

L'anallagmatique la plus générale ne peut pas être définie comme le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est dans un rapport constant avec le produit des distances à deux autres points fixes.

Pour qu'une anallagmatique soit susceptible d'une pareille définition, il faut et il suffit que l'on puisse inscrire dans la ligne focale un quadrilatère formé par quatre génératrices rectilignes de la surface directrice. Lorsqu'il existe un pareil quadrilatère, il en existe une infinité d'autres.

On rencontre ainsi un théorème indépendant des anallagmatiques, tout à fait analogue au célèbre théorème de

---

(*) *Voir*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1864, p. 157, une définition analogue du tore donnée par M. Darboux.

M. Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques : dans la courbe d'intersection d'un hyperboloïde et d'une autre surface du deuxième ordre, il est, en général, impossible d'inscrire un polygone d'un nombre pair donné de côtés formé par des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde; mais lorsqu'on pourra en trouver un, il en existera une infinité d'autres.

Ce théorème se déduit de celui de M. Poncelet par une simple perspective.