

A. PICART

**Note sur les surfaces du second degré  
et solution de la question 700**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 3  
(1864), p. 532-535

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1864\\_2\\_3\\_532\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3_532_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**NOTE SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ  
ET SOLUTION DE LA QUESTION 700;**

PAR M. A. PICART,  
Professeur au lycée Charlemagne.

---

La proposition énoncée sous le n° 700 dans la livraison de mars, savoir :

*La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement (STREBOR), est une conséquence immédiate de quelques propriétés bien connues des surfaces du second degré.*

1° *Le rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface du second degré (à centre) est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente, divisé par la distance du centre au plan tangent en ce point :  $r = \frac{D^2}{P}$ .*

En effet, soit  $ds$  le rayon vecteur de l'indicatrice qui correspond à la section normale menée par un point  $M$ , et  $k$  la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent en ce point; le rayon de courbure  $r$  de la section est égal à  $\frac{ds^2}{2k}$ . Désignons par  $E$  le demi-diamètre qui aboutit au point  $M$ , par  $h$  la portion de ce diamètre comprise entre  $M$  et le plan de l'indicatrice, et par  $\theta$  l'angle qu'il forme avec la normale en  $M$ ; on a, d'une part,

$$k = h \cos \theta,$$

d'autre part,

$$\frac{2h}{E} = \frac{ds^2}{D^2}.$$

Portant ces valeurs de  $k$  et  $ds^2$  dans l'expression de  $r$ , on obtient

$$r = \frac{D^2}{E \cos \theta}$$

ou

$$(1) \quad r = \frac{D^2}{P}.$$

**COROLLAIRE.** — *Le long d'une section circulaire, le rayon de courbure de la section normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.*

On peut remarquer encore, en passant, une conséquence importante de la formule (1), savoir :

*Les sections circulaires en chaque point sont également inclinées sur les lignes de courbure qui passent par ce point; puisque les rayons de courbure des sections normales, dirigées suivant les deux sections circulaires, sont égaux, en vertu de la formule (1).*

2° *La distance, en un point, d'une surface du second degré à la surface homofocale infiniment voisine, est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.*

Désignons, suivant l'usage, par  $\rho^2$ ,  $\rho^2 - b^2$ ,  $\rho^2 - c^2$ , les carrés des demi-axes de la surface; par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles que forme avec les axes la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en un point de cette surface. On a

$$P^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha + (\rho^2 - b^2) \cos^2 \beta + (\rho^2 - c^2) \cos^2 \gamma$$

ou

$$P' = \rho^2 - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma.$$

Si l'on passe à la surface homofocale infiniment voisine, en laissant constants  $\beta$ ,  $\gamma$ , la variation de  $P$  sera la

distance  $dn$  cherchée. On a donc

$$(2) \quad dn = \frac{\rho d\rho}{P}$$

3° *Le long d'une section circulaire, le cosinus de l'angle  $\theta$ , que forme la normale en un point avec le rayon du cercle qui aboutit à ce point, est égal au quotient du rayon de ce cercle par le rayon de courbure de la section normale correspondante :  $\cos \theta = \frac{R}{r}$ .* (Théorème de Meusnier.)

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de cette Note.

Que l'on mène les normales à la surface le long des sections circulaires diamétrales, et qu'on les prolonge extérieurement jusqu'à la surface homofocale infiniment voisine, les extrémités de ces normales sont à une distance du centre égale à

$$R + \frac{\rho d\rho}{P} \cdot \cos \theta$$

ou

$$R + \frac{\rho d\rho}{P} \cdot \frac{R}{r}$$

ou

$$R + \frac{\rho d\rho}{P} \cdot \frac{RP}{R^2}$$

ou enfin

$$R + \frac{\rho d\rho}{R} \quad (*).$$

• Cette distance est constante; tous ces points sont donc sur une sphère concentrique à la surface, et, par suite, ils appartiennent aux sections circulaires diamétrales de la surface homofocale infiniment voisine.

---

(\*) Ce que nous appelons  $R$  ici est le demi-axe moyen de la surface.

( 535 )

**Cette conclusion renferme la proposition énoncée.**

*Note.* — MM. Courtin et Godart, Angiboust, élèves de Sainte-Barbe, Lacauchie, élève du lycée de Strasbourg, et de Marsilly, nous ont adressé des vérifications analytiques du théorème de M Strebor.