J. ROMAND

Concours d'agrégation pour les lycées (année 1863)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 52-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__52_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES (ANNÉE 1863);

PAR M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Composition en Analyse appliquée.

1° *Déterminer la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur deux droites fixes et sur une circonférence de cercle qui rencontre ces deux droites.*

2° *Quelles conditions doivent remplir les deux droites fixes pour que les deux plans qui passent par chacune d'elles et par la génératrice se coupent constamment à angle droit? Déterminer dans ce cas les deux séries de sections circulaires qu'admet la surface.*

1° Soient AB, A′B′ les deux droites données rencontrant en A, B la circonférence donnée O dont le rayon sera désigné par R. Je prends A'B' pour axe des z, la tangente à la circonférence en A' pour axe des y, et la direction du diamètre passant par le point A' pour axe des x.

a, b désignant les coordonnées du point A, les équations de AB seront

$$x - a = mz, \quad y - b = nz.$$

Soient

$$(G) \qquad x - \alpha = \gamma z, \quad y - \beta = \delta z$$

les équations d'une droite. Pour qu'elle rencontre A'B', AB et la circonférence, les paramètres α, β, γ, δ doivent satisfaire aux équations de condition

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\alpha - a}{\beta - b} = \frac{m - \gamma}{n - \delta},$$

$$(2) \qquad \beta^2 + \alpha^2 - 2R\alpha = 0.$$

Il suffit d'éliminer α, β, γ, δ entre ces équations et les équations (G) pour avoir celle de la surface.

Les équations (1) et (G) donnent premièrement par l'élimination de γ, δ.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y}, \quad \frac{x - a}{\beta - b} = \frac{mz - x + a}{nz - y + b},$$

d'où

$$\alpha = x\frac{bx - ay + (an - bm)z}{bx - ay + (nx - my)z},$$

$$\beta = y\frac{bx - ay + (an - bm)z}{bx - ay + (nx - my)z}.$$

Substituant ces expressions à α, β dans l'équation (2) et remplaçant $2R$ par $\dfrac{a^2 + b^2}{a}$, il vient

$$a(x^2 + y^2)[bx - ay + (an - bm)z]$$
$$-(a^2 + b^2)x[bx - ay + (nx - my)z] = 0,$$

suppression faite du facteur $bx - ay + (an - bm)z$.

Cette équation du 3^e degré prend la forme

$$\begin{aligned}&[a(x^2+y^2) - (a^2+b^2)x](bx - ay)\\ &+ [a(an - bm)(x^2+y^2) - (a^2+b^2)(nx - my)x]z = 0,\end{aligned}$$

en réunissant les termes qui contiennent la variable z. Le multiplicateur de cette variable revient à

$$n(a^2y^2 - b^2x^2) + m(ay - bx)(ax - by);$$

par conséquent on arrive enfin à l'équation du second degré

$$(\mathrm{S})\quad ax^2 + ay + (mb - na)yz - (ma + nb)zx - (a^2+b^2)x = 0,$$

en supprimant le facteur $bx - ay$.

Le facteur $bx - ay + (an - bm)z$ donnerait un plan passant par le point A′ et la droite AB, et le facteur $bx - ay$ un plan passant par le point A et la droite A′B′; une droite qui engendrerait le premier en tournant autour de A′, ou le second en tournant autour de A, satisferait évidemment à l'énoncé.

La surface (S) ne peut être qu'une des surfaces du second ordre admettant des génératrices rectilignes (hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique, cône ou cylindre). Si elle a un centre, les coordonnées de ce point seront données par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} 2ax' - (ma + nb)z' = a^2 + b^2,\\ 2ay' + (mb - na)z' = 0,\\ (ma - nb)x' - (mb - na)y' = 0.\end{cases}$$

Le déterminant de ces équations est $\frac{a}{4}(m^2+n^2)(a^2+b^2)$; donc, si l'on écarte d'abord les cas particuliers

$$(m = 0,\ n = 0) \quad \text{et} \quad (a = 0,\ b = 0),$$

la surface (S) a un centre.

Des équations (4) on tire

$$x' = \frac{(mb - na)^2}{2a}.$$

Si l'on suppose $mb - na \gtrless 0$, cette valeur de x' ne rend pas nulle la partie indépendante des variables dans l'équation transformée; la surface (S) est donc un *hyperboloïde à une nappe*.

Si l'on avait $m = 0$, $n = 0$, le déterminant serait nul. Dans ce cas, où AB est parallèle à A′B′, l'équation (S) se réduit à

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a} x = 0,$$

et représente le cylindre dont les génératrices parallèles aux droites données s'appuient sur la circonférence.

Pour $a = 0$, $b = 0$, ce qui rend encore le déterminant égal à zéro, il n'y a plus de relation nécessaire entre x, y, z. On voit en effet que, A étant confondu avec A′, toute droite passant par le point A′ rencontre les deux droites et la circonférence données.

Si l'on avait enfin $mb - na = 0$ sans que m et n ou a et b fussent nuls en même temps, il s'ensuivrait $x' = 0$ et la surface (S) serait un cône. Dans ce cas AB rencontre A′B′, car l'équation de AB sur le plan xy est $\frac{x-a}{y-b} = \frac{m}{n}$ et se ramène à $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Or toute droite passant par le point de rencontre et s'appuyant sur la circonférence satisfait à l'énoncé.

2° Je prends pour axe des z l'axe de la circonférence donnée, et deux droites à angle droit dans son plan pour axes des x et des y. a, b désignant les coordonnées du point A où AB rencontre la circonférence, les équations de AB seront

$$x - a = mz, \quad y - b = nz.$$

Si α, β désignent les coordonnées du point P où la génératrice dans une de ses positions rencontre la circonférence, le plan déterminé par P et AB sera représenté par

$$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + z = 0,$$

A, B étant donnés par les équations

$$A(a - \alpha) + B(b - \beta) = 0, \quad Am + Bn + 1 = 0.$$

L'élimination de A, B entre ces trois équations conduit à

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b - \beta)(x - \alpha) - (a - \alpha)(y - \beta) \\ + [n(a - \alpha) - m(b - \beta)]z = 0. \end{array} \right.$$

Pour avoir l'équation du plan (P, A'B'), il suffit de remplacer dans celle-ci a, b, coordonnées de A, par a', b', coordonnées de A', et m, n, coefficients angulaires de AB, par m', n', coefficients analogues de A'B'. La condition de perpendicularité des deux plans sera donc

$$\begin{array}{l} (b - \beta)(b' - \beta) + (a - \alpha)(a' - \alpha) \\ + [n(a - \alpha) - m(b - \beta)][n'(a' - \alpha) - m'(b' - \beta)] = 0; \end{array}$$

et pour qu'ils soient toujours perpendiculaires entre eux, il faut que cette équation soit vérifiée pour toute valeur de α, eu égard à ce que $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$.

En remplaçant β par $\pm\sqrt{R^2 - \alpha^2}$, il vient

$$\begin{array}{l} [aa' + bb' + (na - mb)(n'a' - m'b') + (1 + mm')R^2] \\ - [(a + a') + n(n'a' - m'b') + n'(na - mb)]\alpha \\ + (nn' - mm')\alpha^2 \\ \mp \big\{[b + b' - m(n'a' - m'b') - m'(na - mb)] \\ \quad + (mn' + m'n)\alpha\big\}\sqrt{R^2 - \alpha^2} = 0; \end{array}$$

on doit donc avoir premièrement (*)

$$nn' - mm' = 0, \quad mn' - m'n = 0,$$

d'où

$$(m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2) = 0,$$

par conséquent

$$m = 0, \quad n = 0,$$

ou bien

$$m' = 0, \quad n' = 0.$$

Considérons $m' = 0$, $n' = 0$. A'B' est perpendiculaire au plan de la circonférence. L'équation précédente se réduit à

$$(aa' + bb' - R^2) - (a + a')\alpha \mp (b + b')\sqrt{R^2 - \alpha^2} = 0;$$

on doit donc avoir encore

$$a' = -a, \quad b' = -b.$$

D'après cela, les conditions demandées sont :

1° Qu'une des deux droites soit perpendiculaire au plan de la circonférence;

2° Que les deux droites passent par les extrémités d'un diamètre.

Ces conditions étant remplies par hypothèse, je fais passer l'axe des x par les points A, A', en sorte que

---

(*) Pour qu'une équation de la forme

$$C + Bx + Ax^2 \pm (N + Mx)\sqrt{R^2 - x^2} = 0$$

soit vérifiée par toute valeur de x, il faut et il suffit que les cinq coefficients A, B,... soient nuls. Cette équation rentre en effet dans

$$(A^2 + M^2)x^4 + 2(AB + MN)x^3 + (B^2 + N^2 + 2AC - M^2R^2)x^2$$
$$+ 2(BC - MNR^2)x + C^2 - N^2R^2 = 0.$$

Appliquant le principe connu, on a d'abord $A^2 + M^2 = 0$, d'où $A = 0$, $M = 0$, puis $B^2 + N^2 = 0$, d'où $B = 0$, $N = 0$, enfin $C = 0$.

$b = 0$, $a = R$, $b' = 0$, $a' = -R$. L'équation actuelle du plan (P, AB) se déduit de l'équation (5) en donnant à a, b les valeurs précédentes, puis celle du plan (P, A'B') en donnant à a, b les valeurs de a', b' et en faisant $m = 0$, $n = 0$; il vient ainsi

$$(y - nz)\alpha - (x - mz - R)\beta = R(y - nz),$$
$$y\alpha - (x + R)\beta = -Ry,$$

d'où

$$\alpha = R \cdot \frac{nz(x+R) + myz - 2xy}{nz(x+R) - myz - 2Ry},$$

$$\beta = -\frac{2Ry(y - nz)}{nz(x+R) - myz - 2Ry}$$

Substituant ces expressions à α, β dans l'équation $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$, on obtient

$$[nz(x+R) + myz - 2xy]^2$$
$$- [nz(x+R) - myz - 2Ry]^2 + 4y^2(y - nz)^2 = 0,$$

dont les deux premiers termes sont le produit de $-2(x+R)(y-nz)$ par $2y(x - mz - R)$. Supprimant les facteurs y et $y - nz$ qui répondent aux plans (A, A'B') ou zx et (A', AB), on a enfin

$$(x - mz - R)(x + R) + y(y - nz) = 0,$$

ou

$$(S') \qquad x^2 + y^2 - nyz - mzx - nRz - R^2 = 0.$$

Le déterminant des équations du centre $m^2 + n^2$ n'est pas nul si m, n ne le sont pas tous deux, et la partie indépendante des variables dans l'équation transformée $-\frac{n^2R^2}{m^2+n^2}$ diffère de zéro si l'on n'a pas $n = 0$; cette équation représente donc un *hyperboloïde à une nappe* quand n est différent de zéro.

Pour $m = 0$, $n = 0$, on a un *cylindre* dont le cercle donné est la section droite, et pour $m \gtrless 0$, $n = 0$, un *cône* dont le sommet est le point de concours de AB, A′B′.

Les sections par des plans parallèles à xy pour lesquelles on a $z = k$ sont évidemment des cercles. On sait que deux sections circulaires d'une surface du second ordre appartenant aux deux systèmes de sections de ce genre sont toujours sur une même sphère. Pour obtenir une circonférence du système qu'il s'agit encore de trouver, il suffit donc de faire passer une sphère par la circonférence donnée. En désignant par c le z de son centre, son équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz - R^2 = 0.$$

Retranchant cette équation de celle de l'hyperboloïde, on a

$$mx + ny + z - (2c + mR) = 0,$$

avec $z = 0$, qui répond à la circonférence donnée.

En attribuant à l'indéterminée c une valeur convenable, cette équation fournira tout plan perpendiculaire à AB; les deux systèmes de sections circulaires sont donc donnés par les plans perperdiculaires à A′B′ et par les plans perpendiculaires à AB.

Le plan des parallèles à ces deux droites menées par le centre est un des plans principaux de la surface.

Note. — La même question a été résolue par M. Gustave Dubois et par M. J.-J.-A Mathieu.