Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 512-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__512_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Handbuch der algebraischen Analysis. Traité d'Analyse algébrique; par M. *O. Schlömilch*, professeur à l'École Polytechnique de Dresde. 3ᵉ édition; 1 volume grand in-8 de 414 pages. Iéna, 1862.

Nous nous proposions depuis longtemps de signaler aux lecteurs des *Nouvelles Annales* cet excellent ouvrage, dont nous ne saurions trop recommander l'étude aux candidats à nos grandes Écoles et aux auditeurs des Facultés des Sciences. Les théories exposées dans ce livre forment une introduction à l'étude du Calcul infinitésimal, servant de complément aux traités d'Algèbre, et renfermant la plupart des formules importantes qui peuvent s'établir d'une manière simple et naturelle sans le secours de la notation différentielle. On en pourra juger d'après l'analyse sommaire que nous allons donner des principaux chapitres.

Chapitre Iᵉʳ. — Généralités sur les variables, sur les fonctions et sur leur représentation géométrique. — Formules relatives à l'addition des fonctions circulaires inverses.

Chapitre II. — Des valeurs-limites des fonctions.

On y trouve exposées avec détail les formules sur lesquelles est fondée la différentiation des fonctions exponentielles et logarithmiques, formules qui sont par elles-mêmes d'un grand usage dans les calculs d'approximation et dans la théorie des séries. La formule

$$\lim \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu,$$

pour δ infiniment petit, de laquelle toutes les autres se déduisent, est démontrée à l'aide d'inégalités très-simples résultant d'identités algébriques, et sans aucun recours à la formule du binôme et aux développements infinis. On en déduit très-simplement la méthode pratique qu'ont employée les premiers inventeurs, Neper et Briggs, pour le calcul des Tables de logarithmes. On en tire encore les formules suivantes, utiles dans la théorie des séries.

Si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{LL}\omega = \mathrm{L}_2\omega, \quad \mathrm{LLL}\omega = \mathrm{L}_3\omega, \ldots,$$

L désignant des logarithmes relatifs à une base quelconque, et si l'on pose

$$f(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^\mu\right]\omega,$$

$$f_1(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{L}\omega}{\mathrm{L}(\omega+1)}\right)^\mu\right]\omega.\mathrm{L}\omega,$$

$$f_2(\omega) = \left[1 - \left(\frac{\mathrm{L}_2\omega}{\mathrm{L}_2(\omega+1)}\right)^\mu\right]\omega.\mathrm{L}\omega.\mathrm{L}_2\omega,$$

et ainsi de suite, on aura, pour ω infini,

$$\lim f_p(\omega) = \mu(\mathrm{L}e)^p.$$

Chapitre III. — Continuité et discontinuité des fonctions.

Chapitre IV. — Valeurs moyennes des fonctions.

Ce chapitre contient le développement d'une théorie analogue à l'*Arithmétique des infinis* de Wallis, et conduisant facilement à un grand nombre de résultats que l'on obtient ordinairement par le calcul intégral. La *valeur moyenne* d'une fonction $f(x)$, prise entre les limites x_0 et X de la variable, n'est autre chose que la quantité

$$\frac{1}{X - x_0}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

On parvient à la déterminer par des considérations directes, analogues à celles du chapitre II, et les résultats obtenus servent à remplacer l'intégration dans ses applications les plus simples au développement des fonctions en séries et à l'évaluation des aires et des volumes. C'est ainsi que l'auteur est conduit aux développements en séries de $\log(1 + x)$ et de $\operatorname{arc\,tang} x$, dont il obtient immédiatement le terme complémentaire sous une forme très-simple. Le même procédé lui donne les développements de $\sin x$ et de $\cos x$, la cubature des surfaces du second ordre et les formules pour le calcul approximatif des quadratures.

Chapitre V. — Des séries infinies.

Nous remarquons d'abord dans ce chapitre le caractère de convergence de la série

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b(b+1)}{a(a+1)} + \frac{b(b+1)(b+2)}{a(a+1)(a+2)} + \ldots.$$

Ensuite, après avoir établi les règles de convergence les plus simples, fondées sur le principe de la comparaison des séries, M. Schlömilch expose avec détail les caractères qui font reconnaître la convergence dans les cas douteux successifs. Puis il traite de la convergence absolue ou conditionnelle, des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable et de la continuité des fonctions qu'elles représentent, des séries périodiques, de l'addition et de la multiplication des séries; il termine par quelques notions sur les séries doubles et sur leur convergence absolue ou conditionnelle.

Chapitre VI. — Théorème du binôme. — Série binomiale pour un exposant quelconque. Discussion de sa convergence. — Propriétés des coefficients binomiaux. — Applications.

Chapitre VII. — Séries exponentielles et logarithmiques.

Chapitre VIII. — Séries goniométriques (développement des fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, etc.). — Expression des fonctions circulaires sous forme de produits infinis. — Développement de $\log \sin x$, $\log \cos x$, etc., en séries. — Développement de $\operatorname{séc} x$, de $\operatorname{tang} x$, etc.

Chapitre IX.— Séries cyclométriques (développement des fonctions circulaires inverses $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, etc.).

Chapitre X. — Des fonctions de variables complexes. — Théorème de Moivre et ses conséquences. — Exponentielles à exposants complexes.

L'auteur part de l'équation de définition

$$e^{x+iy} = \lim \left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m$$

pour $m = \infty$.

Logarithmes des quantités complexes.— Fonctions circulaires des quantités complexes.

Nous aurions désiré que l'auteur eût indiqué à cet endroit la notation si commode des fonctions hyperboliques, pour désigner les quantités

$$\frac{1}{i}\sin ix = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La théorie de ces fonctions, dont l'emploi est si commode dans le calcul intégral et en particulier dans le développement des fonctions elliptiques, mérite de devenir classique, surtout depuis la publication récente des excellentes Tables de M. Gronau. Il aurait suffi d'ailleurs de quelques indications, les formules relatives aux fonctions hyperboliques ne différant que par quelques changements de signe des formules relatives aux fonctions circulaires.

Représentation géométrique des nombres complexes.

Peut-être l'auteur n'a-t-il pas fait assez ressortir ici combien cette représentation est liée à l'origine même des quantités complexes; elle est déjà contenue dans la définition même de l'exponentielle imaginaire

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

$\cos x$ et $\sin x$ étant l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle de rayon 1. On aurait pu indiquer également l'analogie entre l'addition des quantités complexes et la composition des vitesses ou des forces. Nous espérons que, dans la prochaine édition, M. Schlömilch ajoutera quelques nouveaux développements sur ce sujet, qu'il connaît si bien.

Chapitre XI. — Séries et produits infinis de quantités complexes.

Chapitre XII. — Des fractions continues.

On ne suppose pas ici que les numérateurs des fractions intégrantes soient tous égaux à l'unité positive. Ils sont laissés quelconques, pour la grandeur et pour le signe.

Caractères de convergence des fractions continues infinies. — Irrationnalité de certaines fractions continues. — *Restes* des fractions continues. — Développement des racines carrées en fractions continues.

Chapitre XIII. — Transformation des séries en fractions continues. — Développement des fonctions les plus importantes en fractions continues. — Irrationnalité des logarithmes naturels et du nombre π. — Remarque finale.

L'ouvrage est terminé par un *Appendice* contenant un résumé de la théorie des équations algébriques. Dans cet abrégé substantiel (90 pages) l'auteur a fait entrer la résolution des équations du troisième et du quatrième degré, les éléments de la théorie des fonctions symétriques, les diverses méthodes pour le calcul approximatif des racines (il donne la préférence à la méthode de Newton modifiée par Horner), et quelques notions sur les déterminants et sur l'élimination.

D'après cet aperçu nécessairement incomplet, on peut juger de quelle utilité serait la lecture de cet ouvrage pour tous ceux qui veulent pousser l'étude des Mathématiques au delà des premiers éléments. Il serait donc bien à désirer que ce livre fût traduit dans notre langue. Cependant, grâce aux progrès que fait de nos jours l'enseignement des langues vivantes, il est à espérer que bientôt aucun candidat sérieux à l'École Polytechnique ne sera arrêté par la difficulté du texte allemand, dont le style est d'une clarté toute française.

Nous saisirons l'occasion de mentionner ici une autre publication importante du savant rédacteur du *Zeitschrift für die Mathematik und Physik*. M. Schlömilch a fait paraître l'année dernière le premier volume de la 2e édition de son Précis d'Analyse supérieure (*Compendium der höheren Analysis*). Ce volume, qui doit former la partie élémentaire de l'ouvrage, renferme à peu près les matières exigées par nos programmes pour la licence ès sciences mathématiques. Le second volume, qui, nous l'espérons, ne tardera pas à suivre le premier, renfermera les éléments des théories plus élevées du calcul intégral, et rendra un service éminent, en facilitant l'étude de ces théories aux lecteurs qui ne peuvent recourir aux ouvrages spéciaux.

J. Houël.