NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

De l'involution plane

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 498-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__498_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

DE L'INVOLUTION PLANE;

PAR M. POUDRA.

La théorie de l'involution est, en Géométrie, une des plus utiles et des plus fécondes, pour l'étude des propriétés des courbes planes du second degré; nous nous proposons de faire voir qu'il y a une théorie analogue pour les surfaces du deuxième degré.

On sait que si, dans un plan, on a une série d'angles droits ayant même sommet, chacun d'eux détermine sur une transversale quelconque deux points, et que la série des couples de points ainsi déterminés forme sur cette droite une involution dont le point central est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet commun de l'angle droit sur cette transversale.

Par analogie, supposons dans l'espace une série d'angles solides trirectangles, ayant même sommet Q. Ils détermineront sur un plan transversal quelconque une série de groupes de trois points conjugués (m, n, p) dont l'ensemble formera, dirons-nous, une involution plane.

Considérons un des triangles, mnp, formé par trois de ces points; il est évident que les trois sphères qui ont pour diamètres les côtés de ce triangle passent toutes les trois par le sommet Q et qu'ainsi elles se coupent suivant une droite QoQ_1, perçant le plan en un point o tel que $Qo = Q_1 o$, et perpendiculaire à ce plan. Abaissons de chaque sommet m, n, p du triangle les perpendiculaires ma, nb, pc sur le côté directement opposé: il est évident que la sphère ayant mn pour diamètre coupera le plan suivant une circonférence passant par les points a et b sommets d'angles droits ayant mn pour base commune; de même la sphère décrite sur np comme diamètre passera par les sommets b, c d'angles droits ayant pour base commune la droite np; de même enfin, la sphère décrite sur mp comme diamètre passera par les points a et c pieds des perpendiculaires abaissées des points m et p sur les côtés respectivement opposés. Il résulte de là :

1° Que le point d'intersection des trois perpendiculaires sera précisément le pied o de la perpendiculaire QoQ_1 abaissée du sommet commun Q sur le plan;

2° Que ce point o sera le même pour tous les triangles formant l'involution;

3° Que les angles tels que mQa, nQb, pQc, $m'Qa'$, $n'Qb'$,..., étant droits, on aura

$$om.oa = on.ob = op.oc$$
$$= om'.oa' = on'.ob' = op'.oc' = \overline{Qo}^2,$$

et qu'ainsi le point o est le point central de l'involution. La longueur Qo sera dite la puissance de l'involution dont Q est le sommet.

4° Si du point o comme centre, avec Qo pour rayon, on décrit dans le plan une circonférence, elle sera dite la circonférence moyenne de l'involution.

5° Si on rabat sur le plan du triangle mnp les trois faces triangulaires qui composent l'angle solide trirectangle Q, autour de chaque côté respectif mn, np, pq, le point Q tombera, pour la première, en Q' sur la perpendiculaire $pocQ'$, pour la deuxième en Q'' sur $moaQ''$, et pour la troisième en Q''' sur $nobQ'''$. D'où résulte qu'on a

$$cm.cn = \overline{Q'c}^2, \quad ap.an = \overline{aQ''}^2, \quad bp.bm = \overline{bQ'''}^2.$$

6° Si dans l'involution plane on suppose le point m fixe, les deux points n, p peuvent varier sur le droite pan, mais par leurs diverses positions ils détermineront sur cette droite une involution linéaire dont a sera le point central et aQ'' la puissance. De même, en supposant successivement n, p fixes.

Si le point m reste sur la droite moa, la droite np restera parallèle à elle-même et la succession des points m et a formera sur la droite ma une involution linéaire dont o sera le point central.

Si le point m est sur la circonférence moyenne, la droite np sera tangente à ce cercle au point a où le diamètre moa coupe cette circonférence.

Si le point m est en o, alors la base opposée np est à l'infini, le plan Qpn devient parallèle au plan de la base, et les arêtes Qp, Qn sont deux horizontales rectangulaires situées dans ce plan.

Si, au contraire, la droite np passait par le point o, alors le point opposé m passerait à l'infini et l'arête Qm deviendrait une horizontale perpendiculaire au plan Qnp qui dans ce cas serait vertical.

Pour une position quelconque du point m, le côté opposé np s'obtiendra en prenant, sur la droite mo qui joint ce point m au point central, une longueur oa telle que $oa.om = \overline{oQ}^2$ et menant par ce point a une perpendiculaire npa à la droite aom, et prenant sur npa deux points n, p tels que $an.ap = \overline{aQ}^2$: on aura ainsi trois points m, n, p formant un groupe de l'involution.

Par suite, un seul triangle mnp détermine généralement l'involution dont il fait partie, puisque le point centra sera le point d'intersection des trois perpendiculaires de ce triangle et que la puissance $\overline{Qo}^2$ de cette involution sera le produit des deux segments dans lesquels ce point o divise une quelconque de ces perpendiculaires. Si le triangle donné mnp contenait un angle obtus, alors le point o serait en dehors du triangle; les trois sphères décrites sur les côtés mn, np, pm comme diamètre se couperaient bien suivant trois plans passant par une même droite perpendiculaire au plan de cette base, mais cette perpendiculaire ne rencontrerait plus les surfaces sphériques, de sorte que le point Q deviendrait imaginaire, ainsi que l'angle trirectangle. On voit, en effet, qu'un angle solide trirectangle ne peut être coupé par un plan en trois points formant un triangle ayant un angle obtus.

Dans chaque triangle mnp de l'involution, les trois perpendiculaires passant par un même point, elles divisent les côtés opposés en segments ayant entre eux la relation :

$$\frac{cm}{cn} : \frac{ap}{an} = \frac{bm}{bp}.$$

Étant donnés dans un même plan deux triangles, chacun d'eux détermine généralement une involution plane; on demande si ces deux involutions peuvent avoir un même groupe commun de trois points.

Il semble au premier abord que la réponse à cette question est négative, cependant nous allons faire voir que ces deux involutions ont un triangle commun et rien qu'un seul. Cette observation est importante, car c'est sur cette proposition que repose la détermination des axes d'une surface du second degré.

Soient o et o' les centres de ces deux involutions; $o\mathrm{Q}$, $o'\mathrm{Q}'$ leurs puissances respectives. Sur la droite oo' qui joint les deux centres, on peut prendre une série de couples de points m, n formant une involution linéaire dont $\overline{o\mathrm{Q}}^2$ serait la puissance, et o le centre; dans ce cas, on a vu que le point conjugué p serait à l'infini sur l'arête $\mathrm{Q}p$, perpendiculaire alors au plan vertical $\mathrm{Q}omn\mathrm{Q}'o'$. De même, dans la seconde involution, prenons sur cette même droite oo' une série de points m', n' formant sur cette droite une involution linéaire dont o' serait le point central et $\overline{o'\mathrm{Q}'}^2$ la puissance; il en résultera que le point conjugué p' sera à l'infini sur l'arête $\mathrm{Q}'p'$ perpendiculaire au même plan vertical $\mathrm{Q}omn\mathrm{Q}'o'm'n'$: donc les deux arêtes $\mathrm{Q}p$, $\mathrm{Q}'p'$ des deux involutions passeraient par le même point p ou p' situé à l'infini. Or, sur la droite oo' il y a deux involutions linéaires, l'une formée par la série des points m, n, et l'autre par celle des points m', n'. On sait que ces deux involutions ont un segment commun et rien qu'un seul; pour le déterminer, traçons dans le plan $QoQ'o'$ la circonférence qui passe par les points Q et Q' et dont le centre serait sur la droite oo' : il est évident qu'elle rencontrera cette droite en deux points qui détermineront le segment commun des deux involutions, car ces points joints à Q ou à Q' donnent toujours deux droites rectangulaires; il en résulte que si r et s sont ces points, les trois arêtes Qr, Qs, Qp et les suivantes $Q'r$, $Q's$, $Q'p$ telles que les arêtes Qp, $Q'p$ sont perpendiculaires au plan des deux autres, par conséquent horizontales et parallèles, ayant ainsi en commun le point p à l'infini, ces deux systèmes de trois arêtes deux à deux rectangulaires auront le triangle commun rsp dont le point p est à l'infini, c'est-à-dire que le triangle commun sera composé d'un côté rq et de deux perpendiculaires élevées en r et s à la droite rs.

Il est encore d'autres propriétés d'un triangle et des trois perpendiculaires considérés comme la base d'un tétraèdre $Qmnp$ à angle trirectangle au sommet Q.

7° Les trois côtés du triangle et les trois perpendiculaires forment six droites jouissant des propriétés de l'involution linéaire, c'est-à-dire qu'elles sont coupées par une transversale en six points en involution.

8° Si par le point central o on mène les parallèles aux côtés du triangle, on aura un faisceau de six droites en involution formées par des couples de droites rectangulaires; mais le point o étant commun à tous les triangles de l'involution, si on mène par ce point des parallèles aux côtés de tous ces triangles, ces parallèles et les perpendiculaires formeront un faisceau de couples de droites rectangulaires, et par conséquent un faisceau de droites d'une même involution. On peut de même considérer l'axe Qo comme l'axe d'un faisceau en involution passant par les droites ci-dessus.

9° Dans le tétraèdre $Qmnp$, l'angle solide en Q étant trirectangle, on a

$$\overline{Qm}^2 + \overline{Qn}^2 + \overline{Qp}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{mn}^2 + \overline{np}^2 + \overline{pm}^2\right) = D^2$$

(D étant le diamètre de la sphère qui passe par les quatre points m, n, p, Q).

On en tire

$$\pi\,.\,\overline{mn}^2 + \pi\,.\,\overline{np}^2 + \pi\,.\,\overline{pm}^2 = 2\pi\,.\,D^2,$$

c'est-à-dire que la somme des surfaces des trois cercles décrits sur les trois côtés du triangle comme diamètres est la moitié de la surface du cercle construit sur le diamètre D de la sphère, par conséquent moitié de la surface de la sphère.

10° Le carré de la surface du triangle mnp est égal à la somme des carrés des trois triangles Qmn, Qnp, Qpm (théorème de Tinseau).

11° La somme des carrés des cosinus des angles que fait la base mnp avec les trois plans rectangulaires Qmn, Qnp, Qpm est égale à l'unité, et la somme des carrés des sinus est égale à 2. Ces sommes sont donc les mêmes pour tous les triangles de l'involution.

12° La droite Qo fait avec les trois arêtes rectangulaires Qm, Qn, Qp des angles dont la somme des carrés des cosinus est égale à 1; or Qo est perpendiculaire au plan de la base mnp : donc la somme des carrés des sinus des angles que font les arêtes avec la base est aussi égale à 1. Si on appelle α, 6, γ ces trois angles, on a

$$\sin\alpha = \frac{Qo}{Qm}, \quad \sin6 = \frac{Qo}{Qn}, \quad \sin\gamma = \frac{Qo}{Qp};$$

donc

$$\sin^2\alpha + \sin^2 6 + \sin^2\gamma = \overline{Qo}^2 \left(\frac{1}{\overline{Qm}^2} + \frac{1}{\overline{Qn}^2} + \frac{1}{\overline{Qp}^2} \right) = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\overline{Qm}^2} + \frac{1}{\overline{Qn}^2} + \frac{1}{\overline{Qp}^2} = \frac{1}{\overline{Qo}^2} = \text{const.}$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des valeurs inverses des arêtes est une quantité constante pour tous les triangles d'une même involution, et égale au carré de la valeur inverse de la perpendiculaire Qo abaissée du sommet commun Q de l'angle trirectangle sur la base.

13° L'involution plane comme celle qui est linéaire est projective, c'est-à-dire que, mise en perspective sur un autre plan, elle donne lieu à une autre involution, mais pour laquelle le point central n'est plus aussi la perspective du point central de la première.

Nous avons établi l'analogie qui existe entre l'involution linéaire engendrée par les côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet, coupés par une transversale; on sait que, dans ce cas, le point central est situé entre chacun des couples de points conjugués, tous les segments formés par ces couples de points empiètent l'un sur l'autre; mais on sait qu'il y a une involution où les segments sont compris l'un dans l'autre et où le point central est en dehors, et qui ne peut plus être engendrée de la même manière. Cette involution a deux points doubles, situés de chaque côté du point central et à égale distance. Nous allons voir qu'il existe un genre d'involution analogue pour l'involution plane.

Sur la même figure, considérons le triangle pon qui a un angle obtus en o; abaissons de chaque sommet la perpendiculaire sur le côté opposé; ces trois perpendiculaires se rencontreront toujours en un même point m, mais qui sera en dehors du triangle pon si ce triangle renferme un angle obtus. Si sur les trois côtés po, pn, on, comme diamètres on décrit trois sphères, les plans d'intersection de ces sphères, deux à deux, seront trois plans verticaux dont les traces mn, mp, ma se couperont suivant une verticale projetée en m, qui ne rencontre aucune des trois sphères. Ces trois traces mn, mp, ma rencontreront les côtés opposés du triangle pon aux points c, b, a, tels, qu'on aura évidemment

$$mc.mn = mb.mp = ma.mo;$$

et si maintenant on considère le tétraèdre Qmnp de la première involution à angle solide trirectangle en Q, on voit que mQ perpendiculaire au plan Qnp sera telle, qu'on aura

$$\overline{mQ}^2 = ma.mo = mb.mp = mc.mn.$$

Du point m comme centre, avec mQ pour rayon, décrivons une sphère, et d'un point *quelconque* Q de cette sphère, abaissons une perpendiculaire Qo sur la base; en ce point Q menons à la sphère un plan tangent Qnp dont la trace soit np, sur laquelle étant pris à volonté un point n, on détermine le point p de manière que l'angle nQp soit droit: il est évident que, quelle que soit la position du point Q sur la sphère de rayon mQ, les trois côtés Qo, Qn, Qp de l'angle solide Qpon dont le sommet est en Q donnera le triangle pon tel, qu'on aura

$$mQ^2 = mc.mn = mb.mp = mo.ma,$$

et alors la série des groupes de trois points tels que p, o, n formera une involution dont le point central m sera extérieur aux triangles pon, et dont la puissance sera le rayon mQ de la sphère.

Dans cette involution, on remarquera que le point Q étant sur la sphère, le tétraèdre Qmnp aura son angle trièdre Q formé de trois angles droits. Le point central m sera fixe et les trois sommets p, o, n variables et déterminés par les arêtes Qp, Qo, Qn qui forment en Q un angle solide qui n'est plus trirectangle, mais dont un des angles est droit. Si dans le plan de la base on décrit une circonférence, dont m serait le centre et la puissance mQ le rayon, on voit que si le point Q se trouve sur cette circonférence, les trois points p, o, n se réuniront en un seul.

Les propriétés particulières à cette involution se déduiront facilement de la considération que l'angle Q, du tétraèdre Qmnp, est trirectangle.

Ainsi, on peut définir généralement l'involution plane comme étant la série de groupes de trois points quelconques, formant des triangles ayant même point d'intersection des trois perpendiculaires; d'où il suit que le produit des deux segments formés sur chaque perpendiculaire entre ce point, le sommet et le côté opposé sur lequel elle est perpendiculaire, est constant. D'où résultent deux différentes involutions, suivant que le point d'intersection de ces trois perpendiculaires est en dedans ou en dehors des triangles, d'où résulte analogie évidente avec l'involution linéaire.

(*La suite prochainement.*)