

Note sur des questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 466-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__466_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR DES QUESTIONS D'EXAMEN
(ÉCOLE POLYTECHNIQUE) ;
PAR UN ABONNÉ.**

QUESTION 41, p. 85. — Résoudre l'équation

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0,$$

et montrer qu'elle a deux racines réelles.

Il est d'abord évident que cette équation n'admet aucune racine réelle négative. La dérivée du premier membre est $4 \cos^2 x$; cette dérivée étant essentiellement positive, la fonction $2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m}$ croît constamment avec x , ce qui montre que l'équation proposée ne peut avoir deux racines réelles.

Pour $x = 0$, le premier membre est négatif; il devient positif pour $x = 1 + \frac{\pi}{m}$; donc l'équation a une racine positive comprise entre 0 et $1 + \frac{\pi}{m}$.

QUESTION 23, p. 84. — *Division d'un polynôme entier $f(x)$ par $x^2 + px + q$. Forme du reste.*

En désignant par $Ax + B$ le reste et par $\varphi(x)$ le quotient, on a

$$(1) \quad f(x) = (x^2 + px + q)\varphi(x) + Ax + B.$$

Soient α, β les racines de $x^2 + px + q = 0$; les substitutions de α et β à x , dans l'égalité (1), donnent :

$$(2) \quad f(\alpha) = A\alpha + B,$$

$$(3) \quad f(\beta) = A\beta + B,$$

d'où

$$(4) \quad A = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$(5) \quad B = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Mais

$$f(\beta) - f(\alpha) = f[\alpha + (\beta - \alpha)] - f(\alpha),$$

ou, d'après le théorème de Taylor,

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (\beta - \alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) (\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''(\alpha) (\beta - \alpha)^3 + \dots$$

Donc

$$(6) \quad A = f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) \cdot (\beta - \alpha) + \frac{1}{1.2.3} f'''(\alpha) \cdot (\beta - \alpha)^2 + \dots$$

L'égalité (5)

$$B = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

revient à

$$B = f(\alpha) - \frac{\alpha [f(\beta) - f(\alpha)]}{\beta - \alpha};$$

d'où

$$B = f(\alpha) - \alpha \cdot A,$$

ce qui donne, en remplaçant A par sa valeur (égalité 6),

$$(7) \quad B = f(\alpha) - \alpha \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) \cdot (\beta - \alpha) + \dots \right].$$

Par conséquent, le reste de la division considérée est

$$\begin{aligned} & x \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) \cdot (\beta - \alpha) + \dots \right] \\ & + f(\alpha) - \alpha \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) \cdot (\beta - \alpha) + \dots \right], \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(\alpha) + (x - \alpha) \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha) (\beta - \alpha) + \dots \right].$$

Lorsque les racines α , β de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont égales entre elles, on a

$$\beta - \alpha = 0,$$

et le reste de la division se réduit à

$$f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha).$$

Dans ce cas, le quotient $\varphi(x)$ de la division a pour va-

leur

$$\frac{1}{1.2} f''(\alpha) + \frac{1}{1.2.3} (x - \alpha) f'''(\alpha) + \dots$$

C'est ce qui résulte évidemment de la formule connue

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) \\ + \frac{1}{1.2} (x - \alpha)^2 \cdot f''(\alpha) + \frac{1}{1.2.3} (x - \alpha)^3 \cdot f'''(\alpha) + \dots$$

QUESTION 121, p. 183.— *Quand deux angles trièdres trirectangles ont un même sommet, leurs six arêtes sont sur un même cône du second degré.*

Prenons pour axes de coordonnées les trois arêtes de l'un des trièdres; l'équation générale des cônes du second degré, passant par ces trois arêtes, est

$$(1) \quad Axy + Bxz + Cyz = 0,$$

A, B, C représentant des paramètres arbitraires.

Actuellement, nommons $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$, les angles que les trois arêtes du second trièdre forment respectivement avec les axes des coordonnées. Ces arêtes ont pour équations

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}, \\ \frac{x}{\cos \alpha'} = \frac{y}{\cos \beta'} = \frac{z}{\cos \gamma'}, \\ \frac{x}{\cos \alpha''} = \frac{y}{\cos \beta''} = \frac{z}{\cos \gamma''};$$

et pour qu'elles appartiennent, toutes trois, à l'un des cônes représentés par l'équation (1), il faut qu'il existe pour A, B, C des valeurs satisfaisant à la fois aux trois

équations

$$(2) \quad A \cos \alpha \cos \epsilon + B \cos \alpha \cos \gamma + C \cos \epsilon \cos \gamma = 0,$$

$$(3) \quad A \cos \alpha' \cos \epsilon' + B \cos \alpha' \cos \gamma' + C \cos \epsilon' \cos \gamma' = 0,$$

$$(4) \quad A \cos \alpha'' \cos \epsilon'' + B \cos \alpha'' \cos \gamma'' + C \cos \epsilon'' \cos \gamma'' = 0.$$

Les deux premières déterminent les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ et par conséquent le cône. Il s'agit donc de faire voir que toute solution des équations (2) et (3) vérifie l'équation (4); autrement dit, il faut prouver que l'une de ces trois équations se déduit des deux autres.

Or, en additionnant membre à membre les trois équations (2), (3), (4) il vient :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\cos \alpha \cos \epsilon + \cos \alpha' \cos \epsilon' + \cos \alpha'' \cos \epsilon'') \\ + B(\cos \alpha \cos \gamma + \cos \alpha' \cos \gamma' + \cos \alpha'' \cos \gamma'') \\ + C(\cos \epsilon \cos \gamma + \cos \epsilon' \cos \gamma' + \cos \epsilon'' \cos \gamma'') \end{array} \right\} = 0.$$

Cette dernière est vérifiée quelles que soient les valeurs de A, B, C, car on a :

$$\cos \alpha \cos \epsilon + \cos \alpha' \cos \epsilon' + \cos \alpha'' \cos \epsilon'' = 0,$$

$$\cos \alpha \cos \gamma + \cos \alpha' \cos \gamma' + \cos \alpha'' \cos \gamma'' = 0,$$

$$\cos \epsilon \cos \gamma + \cos \epsilon' \cos \gamma' + \cos \epsilon'' \cos \gamma'' = 0,$$

puisque $\alpha, \alpha', \alpha'', \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \gamma, \gamma', \gamma''$ représentent les angles que les axes des coordonnées OX, OY, OZ forment avec les trois arêtes rectangulaires du second trièdre.

D'après cela, on voit que toute solution commune à deux quelconques des équations (2), (3), (4) satisfait à la troisième : c'est ce qu'il fallait démontrer.

QUESTION 131, p. 184. — *Étant donnée une surface du second degré et un point fixe, on mène par ce point toutes les cordes dont ce point est le milieu. Lieu de ces droites.*

Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

l'équation de la surface rapportée à un système d'axes quelconques passant par le point donné pris pour origine. Les équations d'une droite menée par ce point sont

$$(1) \quad x = mz, \quad y = nz,$$

et, pour que cette droite rencontre la surface en deux points également distants de l'origine, il faut que

$$(2) \quad Cm + C'n + C'' = 0.$$

En éliminant m et n entre les relations (1) et (2), il vient

$$Cx + C'y + C''z = 0;$$

c'est l'équation du lieu cherché.