A. D'ASTRE

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 465-466
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__465_1>

QUESTION D'EXAMEN

(voir p. 85, quest. 40);

SOLUTION DE M. A. D'ASTRE
(Institution Barbet).

Décomposer en facteurs réels du second degré l'expression

$$(x^2+px+q)^2+1.$$

Considérons l'expression

$$(x^2+px+q)^2+1$$

comme composée de deux des termes du carré du polynôme

$$x^2+px+q+1.$$

Nous l'écrirons alors

$$(x^2+px+q+1)^2-2(x^2+px+q).$$

Si x^2+px+q était un carré parfait, la décomposition serait facile.

On est ainsi amené à introduire une constante λ qu'on déterminera de manière à former une différence de carrés.

Nous écrirons donc l'expression de la manière suivante :

$$(x^2 + px + q + \lambda)^2 - 2\lambda(x^2 + px + q) - \lambda^2 + 1,$$

ou

$$(x^2 + px + q + \lambda)^2 - 2\lambda\left(x^2 + px + \frac{\lambda^2 + 2\lambda q - 1}{2\lambda}\right).$$

Pour que le second terme soit un carré, λ doit satisfaire à la relation

$$(1) \qquad \lambda^2 - \lambda\left(\frac{p^2 - 4q}{2}\right) - 1 = 0,$$

et il est alors le carré de

$$\sqrt{2\lambda}\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

On prendra pour λ la racine positive de l'équation (1), et on connaîtra les deux facteurs réels du second degré que l'on cherchait.