DURANTON

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale supérieure (1864)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 455-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__455_1>

SOLUTION DE LA QUESTION

proposée au concours d'admission à l'École Normale supérieure (1864);

PAR M. DURANTON.

MM. Painvin et Gerono ont résolu, dans le numéro d'août 1864 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la question proposée au dernier concours d'admission à l'École Normale supérieure. Le premier s'appuie, pour une partie du moins de ses calculs, sur une définition qu'on ne trouve point dans les ouvrages élémentaires, le second sur d'ingénieuses considérations géométriques. Nous indiquerons modestement, après deux hommes très-connus, la marche simple qui nous a conduit au résultat,

(*) L'aire totale de la figure est indépendante du nombre des côtés du polygone sphérique considéré. Car la démonstration de M. Al. M. s'applique à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, et le résultat obtenu reste le même, quand le nombre des côtés varie. G.

et nous adopterons les notations de M. Painvin, afin d'éviter des redites en renvoyant à sa discussion.

Énoncé. — *On donne trois points fixes* A, B, C *et une droite fixe* AA′ *passant par le point* A : *trouver le lieu des points de contact des droites parallèles à* AA′ *et tangentes aux coniques passant par les trois points* A, B, C *et touchant la droite* AA′.

Ce lieu est une conique; on demande le lieu des foyers de ces coniques lorsqu'on fait varier la position de la droite AA′.

I.

Nous prendrons pour axes les droites AB, AC et nous désignerons par a et b les distances AB, AC. Soient

$$y = mx, \quad y = mx + \mu, \quad y = \alpha x,$$

les équations de la droite AA′, d'une de ses parallèles HH′ et de la droite AM qui joint les points de contact A et M. L'équation d'une conique tangente en A et en M aux deux droites AA′, HH′ pourra s'écrire

$$(y - mx)(y - mx - \mu) - k(y - \lambda x)^2 = 0.$$

Si l'on exprime que cette équation est satisfaite par les coordonnées des points B et C, on trouvera deux équations dont on déduira très-facilement k et μ en fonction de λ. La valeur de μ est

$$\mu = \frac{ab(\lambda^2 - m^2)}{a\lambda^2 + mb}.$$

La droite HH′ est ainsi représentée par

$$y = mx + \frac{ab(\lambda^2 - m^2)}{a\lambda^2 + mb}.$$

En y joignant l'équation

$$y = \alpha x$$

de AM, on a deux équations dont on pourrait tirer les valeurs des coordonnées x et y du point M en fonction de l'indéterminée λ. L'élimination de λ entre ces deux équations conduit, par la suppression du facteur $y - mx$, à l'équation

$$\frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - y - mx = 0$$

du lieu du point M. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, l'équation se réduit à

$$(1) \qquad \frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{ma + b}{4} = 0.$$

II.

En second lieu, si l'on désigne par α et ε les coordonnées d'un foyer de la conique, et par θ l'angle $x\mathrm{A}y$ des axes, l'équation de cette conique pourra s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varepsilon)^2 + 2(x - \alpha)(y - \varepsilon)\cos\theta = (fx + hy + l)^2.$$

Si l'on identifie avec l'équation (1), on obtient entre α, ε, f, h, l, cinq équations d'où l'on élimine sans difficulté f, h, l et m; il en résulte pour l'équation du lieu cherché des foyers

$$\alpha\varepsilon(\varepsilon\cos\theta + \alpha)(\alpha\cos\theta + \varepsilon)$$
$$- \frac{\cos^2\theta}{4}\left(\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{a^2 + b^2}{\cos\theta}\alpha\varepsilon + b^2\alpha^2\right) = 0.$$