E. PROUHET

Remarques sur la transformation et l'abaissement des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 433-438
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__433_0>

REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION ET L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS

(voir page 122);

PAR M. E. PROUHET.

8. PROBLÈME. — *Sachant que le produit de deux racines d'une équation est l'unité, trouver ces deux racines.*

Les deux racines seront communes à l'équation proposée

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

et à sa transformée

$$(2) \qquad x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Mais au lieu d'appliquer à ces deux équations l'opération du plus grand commun diviseur, il y aura avantage à les remplacer par les suivantes :

$$(3) \qquad f(x) + x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$(4) \qquad f(x) - x^m f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

qui sont évidemment réciproques, et par conséquent susceptibles d'abaissement.

Exemple :

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 = 0.$$

L'équation aux inverses des racines sera

$$A_4 + A_3 x + A_2 x^2 + A_1 x^3 + A_0 x^4 = 0.$$

On aura donc les équations réciproques

$$A_0 + A_4 + (A_1 + A_3)x + 2A_2x^2 + (A_3 + A_1)x^3 + (A_4 + A_0)x^4 = 0,$$
$$A_0 - A_4 + (A_1 - A_3)x - (A_1 - A_3)x^3 - (A_0 - A_4)x^4 = 0,$$

ou bien

$$(A_0 + A_4)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (A_1 + A_3)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2A_2 = 0,$$
$$(A_0 - A_4)\left(x_2 - \frac{1}{x^2}\right) + (A_1 - A_3)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Cette dernière se réduit à

$$(A_0 - A_4)\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_1 - A_3 = 0,$$

d'où

$$x + \frac{1}{x} = \frac{A_1 - A_3}{A_4 - A_0},$$

équation qui fait connaître les deux racines cherchées ; mais il y a une équation de condition. Si l'on pose

$$z = x + \frac{1}{x},$$

on aura

$$(A_0 + A_4)z^2 + (A_1 + A_3)z + 2(A_2 - A_0 - A_4) = 0,$$
$$z = \frac{A_1 - A_3}{A_4 - A_0}.$$

Éliminant z, il vient

$$(A_0 + A_4)(A_1 - A_3)^2 + (A_1^2 - A_3^2)(A_4 - A_0) + 2(A_2 - A_0 - A_4)(A_4 - A_0)^2 = 0.$$

Telle est la relation qui doit avoir lieu pour que l'équation du quatrième degré ait deux racines réciproques.

9. Il est clair qu'on ramènerait au problème précé-

dent celui qui consisterait à chercher deux racines dont le produit serait égal à α^2. Il suffirait de diviser toutes les racines de l'équation proposée par α.

On trouvera sans peine les conditions qui devront être remplies pour que les racines d'une équation se partagent en couples donnant le même produit ; mais cette propriété n'appartiendra en même temps à la dérivée que dans un cas très-particulier.

10. Problème. — *Trouver une équation qui ait pour racines les carrés des racines d'une autre équation.*

Si

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

est l'équation proposée, il suffit de poser

$$y = x^2 \tag{2}$$

et d'éliminer x entre les équations (1) et (2); mais on arrivera plus tôt au résultat en remarquant que l'équation

$$f(x)f(-x) = 0, \tag{3}$$

qui ne change pas quand on change x en $-x$, est de la forme

$$(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)\ldots(x^2 - l^2) = 0,$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines de l'équation (1); donc, si l'on fait $x^2 = y$ dans l'équation (3), on aura l'équation demandée.

Si l'on désigne par P l'ensemble des termes de $f(x)$ qui contiennent x à des puissances paires, et par Qx l'ensemble des autres termes (Q étant une fonction de x^2), on aura

$$f(x)f(-x) = (P + Qx)(P - Qx) = P^2 - Q^2x^2 = 0.$$

Par exemple, l'équation aux carrés des racines de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sera, en posant $x^2 = y$,

$$(py + r)^2 - (y + q)^2 y = 0.$$

11. Problème. — *Trouver l'équation aux cubes des racines d'une équation proposée.*

On peut toujours écrire

$$f(x) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}x + \mathrm{R}x^2,$$

P, Q, R désignant des fonctions de x^3, car il suffit pour cela de partager les termes en trois groupes, suivant que l'exposant de x divisé par 3 ne laisse aucun reste, ou donne pour reste 1 ou 2. Soient α et α^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité, nous aurons

$$f(\alpha x) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\alpha x + \mathrm{R}\alpha^2 x^2,$$
$$f(\alpha^2 x) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\alpha^2 x + \mathrm{R}\alpha x^2,$$

et

$$f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x) = \mathrm{P}^3 + \mathrm{Q}^3 x^3 + \mathrm{R}^3 x^6 - 3\mathrm{PQR}x^3.$$

Si a est une racine de l'équation $f(x) = 0$, a, $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha^2}$, ou a, $a\alpha^2$, $a\alpha$ seront des racines de l'équation

$$f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x) = 0,$$

dont le premier membre sera divisible par

$$(x - a)(x - \alpha a)(x - \alpha^2 a), \quad \text{ou} \quad x^3 - a^3.$$

Donc, si dans la dernière équation, c'est-à-dire dans

$$\mathrm{P}^3 + \mathrm{Q}^3 x^3 + \mathrm{R}^3 x^6 - 3\mathrm{PQR}x^3 = 0,$$

on fait $x^3 = y$, on aura l'équation aux cubes des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Par exemple, l'équation aux cubes des racines de

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sera

$$(y+r)^3 + p^3y^2 + q^3y - 3pq(y+r)y = 0.$$

12. Plus généralement, si l'on voulait former une équation ayant pour racines les racines de l'équation $f(x) = 0$ élevées à la $n^{ième}$ puissance, il suffirait de faire $y = x^n$ dans l'équation

$$f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x)\ldots f(\alpha^{n-1}x) = 0,$$

α désignant une racine primitive de l'équation $x^n - 1 = 0$. Waring a indiqué cette méthode dans ses *Miscellanea analytica*, 1772, p. 12. Depuis, M. Kummer ayant eu à considérer un produit de la forme précédente, dans une question très-différente de celle que nous traitons, a remarqué que cette fonction était un déterminant (*). Dès lors la solution de Waring prend une autre forme que nous allons faire connaître, et qui, quoique un peu compliquée, ne laissera pas de plaire à ceux qui aiment les déterminants.

Posons

$$f(x) = P + Qx + Rx^2 + \ldots + Ux^{n-3} + Vx^{n-2} + Zx^{n-1},$$

P, Q, R,..., U, Z étant des fonctions de x^n. Pour avoir l'équation aux $n^{ièmes}$ puissances des racines de l'équation $f(x) = 0$, il suffira de faire $x^n = y$ dans l'équation

$$\begin{vmatrix} P & Qx & Rx^2 & \ldots & Zx^{n-1} \\ Zx^{n-1} & P & Qx & \ldots & Vx^{n-2} \\ Vx^{n-2} & Zx^{n-1} & P & \ldots & Ux^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Qx & Rx^2 & Sx^3 & \ldots & P \end{vmatrix} = 0.$$

(*) *De Numeris complexis, qui radicibus unitatis, etc.* (*Journal de M. Liouville*, t. XII, p. 187-188).

On voit que les lignes successives ne sont que des permutations circulaires des termes de la première.

(*Sera continué.*) P.