E. Prouhet

Exercices sur la rectification des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 403-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__403_1>

EXERCICES SUR LA RECTIFICATION DES COURBES PLANES;

PAR M. E. PROUHET.

FORMULE POUR LA RECTIFICATION DES ARCS DE COURBE PLANE.

1. Soient AB une courbe plane, O un point pris dans son plan, OP une perpendiculaire à la tangente menée à la courbe AB par un de ses points M : *La normale à la courbe, lieu des points* P, *s'obtient en joignant le point* P *au milieu de la droite* OM.

2. *Si l'on désigne par p la perpendiculaire* OP *et par ω l'angle que cette droite fait avec un axe fixe, on aura*

$$\mathrm{PM} = \pm \frac{dp}{d\omega}.$$

Cela résulte de ce que PM est égale à la sous-normale de la podaire (c'est ainsi qu'on nomme le lieu des points P), quand on considère p et ω comme des coordonnées polaires.

3. *Si du point* O *on abaisse une perpendiculaire* OQ *sur la normale* CM *à la courbe* AB, C *étant le centre de courbure, on aura*

$$CQ = \pm \frac{d^2 p}{d\omega^2},$$

car le point Q appartient à la podaire de la développée de la courbe AB.

4. *Si l'on désigne l'arc* AB *par* s, *et par* α *et* β *les angles que les normales aux points* A *et* B *font avec un axe fixe, on aura*

$$\text{(I)} \qquad s = \int_\alpha^\beta p\,d\omega + \left(\frac{dp}{d\omega}\right)_\beta - \left(\frac{dp}{d\omega}\right)_\alpha.$$

En effet, ρ étant le rayon de courbure, on a

$$s = \int_\alpha^\beta \rho\,d\omega = \int_\alpha^\beta (\mathrm{OP} \pm \mathrm{CQ})\,d\omega = \int_\alpha^\beta \left(p + \frac{d^2 p}{d\omega^2}\right) d\omega.$$

5. *Quand le point* O *est le point de concours des normales extrêmes et plus généralement quand les extrémités de l'arc* AB *sont également distantes des points correspondants de la podaire, on a*

$$\text{(II)} \qquad s = \int_\alpha^\beta p\,d\omega.$$

Conséquence de (2) et de (4).

6. *La formule* (I) *ne change pas quand on change* p *en*

$$p + a\cos\omega + b\sin\omega.$$

Analytiquement cela résulte de ce que

$$z = a\cos\omega + b\sin\omega$$

est l'intégrale générale de l'équation

$$z + \frac{d^2 z}{d\omega^2} = 0;$$

géométriquement cette transformation revient à déplacer le point O d'où l'on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe.

APPROXIMATION DES ARCS DE COURBE.

7. *Soient* AB *un arc convexe,* O *un point pris dans la concavité de cette courbe,* ϖ *l'angle des normales extrêmes, en désignant par* $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2n}$ *les rayons de courbure qui font avec la normale au point* A *les angles* $0, \frac{\varpi}{2n}, \frac{2\varpi}{2n}, \frac{3\varpi}{2n}, \dots,$ *on aura*

$$AB > \varpi \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \rho_2 + \rho_4 + \dots + \frac{1}{2}\rho_{2n}}{n},$$

$$AB < \varpi \frac{\rho_1 + \rho_3 + \dots + \rho_{2n-1}}{n},$$

si d'ailleurs $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ *est négatif pour les valeurs de* ω *comprises entre* 0 *et* ϖ.

Ces deux inégalités résultent de ce que $\int \rho\, d\omega$ peut être considérée comme l'aire d'une courbe convexe dont ρ et ω seraient les coordonnées rectangulaires.

8. *Si* O *est le point de concours des normales extrêmes, et* p_0, $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ *les perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un polygone équiangle circonscrit à la courbe* AB, *on aura*

$$AB = \lim \varpi \frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \dots + \frac{1}{2}p_{2n}}{n} \quad \text{pour } n = \infty,$$

$$AB = \lim \varpi \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{2n-1}}{n} \quad \text{pour } n = \infty.$$

9. *Soit* CD *une droite partagée au point* E *en deux segments,* $CE = a$, $CD = b$. *Si l'on partage en* $2n$ *parties égales la demi-circonférence décrite sur* CD *comme diamètre et que l'on désigne par* $p_0, p_1, \dots, p_{2n}$, *les droites menées du point* E *aux divers points de division, le périmètre de l'ellipse ayant* $2a$ *et* $2b$ *pour axes sera compris entre deux circonférences ayant pour rayons la première*

$$\frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \dots + \frac{1}{2}p_{2n}}{n}$$

et la seconde

$$\frac{p_1 + p_3 + \dots + p_{2n-1}}{n}.$$

Le théorème aurait encore lieu si le point E était pris sur le prolongement de CD et que l'on eût encore $EC = a$, $ED = b$.

10. *La moyenne des distances d'un point pris dans le plan d'un cercle, aux sommets d'un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrits dans le cercle, est égale au périmètre d'une ellipse ayant pour demi-axes la plus grande et la plus courte distance du point à la circonférence, divisé par 2π. — Cas où le point est pris sur la circonférence.*

Conséquence de (9).

11. *Le périmètre d'une ellipse ayant pour axes $2a$ et $2b$, $a > b$, étant désigné par* E, *on a*

$$E > 2\pi b, \qquad E < 2\pi a$$

$$E > 2\pi\cdot\frac{a+b}{2}, \qquad E < 2\pi\cdot\frac{\sqrt{2a^2+2b^2}}{2},$$

$$E > 2\pi\cdot\frac{a+b+\sqrt{2a^2+2b^2}}{4}, \quad E < 2\pi\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{2}\sqrt{2a^4+12a^2b^2+2b^4}}}{2}.$$

....

Conséquence de (9).

TRANSFORMATION DES ARCS DE COURBE.

12. Si AB et A'B' sont deux droites parallèles, et a, b, des points pris sur les droites AA', BB', de telle sorte que

$$\frac{Aa}{A'a} = \frac{Bb}{B'b} = \frac{m}{n},$$

on aura

$$ab = \frac{n\,AB \pm m\,A'B'}{m+n}.$$

On prendra le signe + si les droites AB, A'B' sont dirigées dans le même sens, et le signe — dans le cas contraire.

13. *Si plusieurs polygones* ABCD..., A'B'C'D'..., A"B"C"D"..., *ont leurs côtés respectivement parallèles, si a est le centre de gravité des sommets homologues* A, A', A",...; *b celui des sommets* B, B', B",..., *et ainsi de suite, le polygone abcd... aura ses côtés parallèles à ceux des premiers polygones, et son périmètre sera égal à la moyenne arithmétique des périmètres des polygones proposés.*

Se démontrera d'abord pour deux polygones, puis pour trois, et ainsi de suite, au moyen du théorème 12.

14. Soient C, C', C",... plusieurs courbes, A, A', A",... des points appartenant respectivement à ces courbes et tels, que les tangentes en ces points soient parallèles. Soit a le centre de gravité des points A, A', A'',... considérés comme des points matériels de poids égaux. *Si les points* A, A',... *se meuvent sur leurs courbes respectives en remplissant toujours les conditions précédentes, l'arc de courbe décrit par le point a sera égal à la moyenne arithmétique des arcs décrits par les points* A, A',..., *en prenant avec le même signe les arcs décrits dans le même sens.*

15. *Étant donné un arc* AB, *le transformer en un arc d'espèce différente et de même longueur.*

Soient OA et OB les normales menées aux extrémités de l'arc AB. Soit A'B' ce que devient AB quand on fait tourner la figure autour de la bissectrice OC de l'angle AOB. En appliquant le théorème 14, on aura une courbe ab égale à la demi-somme des arcs AB et A'B', et par conséquent égale à chacun de ces arcs.

La courbe ab est symétrique par rapport à OC. En doublant les dimensions d'une de ses moitiés sans changer sa forme, on aura une courbe $a'c'$ de même longueur que AB, mais dont les normales extrêmes feront un angle égal à la moitié de l'angle AOB.

En opérant sur $a'c'$ comme sur AB et répétant indéfiniment cette suite d'opérations, on transformera l'arc primitif en arcs de même longueur dont les normales extrêmes feront un angle de plus en plus petit et qui, par conséquent, différeront de moins en moins d'une ligne droite.

16. Dans la transformation précédente, on a changé un arc AB en un autre arc de même ouverture ou d'une ouverture moitié moindre, c'est-à-dire dans lequel les normales extrêmes faisaient le même angle ou un angle moitié moindre. Soit ϖ l'ouverture d'un certain arc AB, posons $p=f(\omega)$: on a

$$s=\int_0^{\varpi}[f(\omega)+f''(\omega)]\,d\omega.$$

On aurait encore

$$s=\alpha\int_0^{\frac{\varpi}{\alpha}}[f(\alpha\omega)+f''(\alpha\omega)]\,d\omega.$$

Soit $p_1=f_1(\omega)$ l'équation de la podaire d'une certaine courbe dont l'arc serait représenté par la formule précédente : on doit avoir

$$f_1(\omega)+f''_1(\omega)=f(\alpha\omega)+f''(\alpha\omega).$$

La fonction f_1 est donc donnée par une équation différentielle linéaire du second ordre, en général difficile à intégrer.

COURBES RECTIFIABLES.

17. *Trouver une courbe, connaissant sa podaire.*

Si $p = f(\omega)$ est l'équation de la podaire, r le rayon vecteur de la courbe cherchée et θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe fixe auquel la podaire est rapportée, il faudra éliminer ω entre les deux équations

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\omega}, \quad r^2 = p^2 + \frac{dp^2}{d\omega^2}.$$

18. *Si l'on prend $f(\omega)$ égal à la dérivée d'une certaine fonction* $F(\omega)$, *l'élimination précédente donnera une équation*

$$\varphi(r, \theta) = 0,$$

qui représentera une courbe rectifiable.

19. *On obtiendra encore une courbe rectifiable si l'on trouve une fonction* M *de x telle, que l'on puisse trouver en termes finis les intégrales*

$$\int \mathrm{M}\,dx, \quad \int \frac{1}{\mathrm{M}}\,dx.$$

Il suffira de poser

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\int \mathrm{M}\,dx.$$

En prenant M de la forme $\mathrm{M} = ax^n$, on aura une courbe algébrique. Si M est une fraction algébrique rationnelle, la rectification de la courbe dépendra généralement des arcs de cercle et des logarithmes.