Nouvelles annales de mathématiques

Nicolaïdès

Sur le lieu des intersections de deux courbes mobiles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 39-41

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__39_0>

SUR LE LIEU DES INTERSECTIONS DE DEUX COURBES MOBILES ;

PAR M. NICOLAÏDÈS.

M. Van der Mensbrugghe a publié dernièrement dans *les Mondes* un extrait d'un Mémoire qui a été présenté à l'Académie royale de Belgique. Le but principal de ce Mémoire est de déterminer l'équation de la courbe, lieu des intersections successives de deux courbes planes, tournant, dans un même plan ou des plans parallèles, autour de deux centres fixes. Cette question importante a été étudiée par M. Le François dans le cas, très-restreint, où les rapports des vitesses de deux lignes tournantes est un nombre entier. Je vais dire ici en quelques lignes comment on peut traiter la question dans le cas où les lignes se meuvent d'une manière quelconque dans un même plan.

Soient

$$(1) \qquad \Phi(x', y') = 0, \quad \Phi_1(x'', y'') = 0$$

les équations de ces courbes; imprimons à chacune d'elles un mouvement quelconque, en faisant suivre ces mouvements par les axes auxquels ces courbes sont rapportées; on aura deux groupes d'équations que voici :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, & F_1(a, b, \alpha) = 0, \\ y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, & F_2(a, b, \alpha) = 0, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = a' + x'' \cos\alpha' - y'' \sin\alpha' & {}_1F(a', b', \alpha') = 0, \\ y = b' + x'' \sin\alpha' + y'' \cos\alpha' & {}_2F(a', b', \alpha') = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ajoute à ces équations une dernière :

$$(4) \qquad f(a, b, a', b', \alpha, \alpha') = 0,$$

pour établir une dépendance entre les deux mouvements, on aura onze équations entre les douze variables

$$x,\ y,\ x',\ y',\ x'',\ y'',\quad a,\ b,\ a',\ b',\quad \alpha,\ \alpha'.$$

Éliminant les dix dernières, on trouvera une relation entre x, y, qui sera précisément l'équation du lieu cherché. Toute la difficulté se réduit donc à trouver les conditions de deux mouvements, et à une élimination. Voici un exemple :

Les équations de deux lignes tournantes sont

$$(5)\qquad x' = 0,\quad x'' = 0,$$

et elles se meuvent sur les plans d'une bielle de longueur B et d'une manivelle de longueur M. Je prends pour origines mobiles le centre de rotation de la manivelle et le point qui décrit une ligne droite pendant le mouvement.

Les équations (2), (3), (4) se réduisent ainsi aux six suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, & y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ x = a + x''\cos\alpha' - y''\sin\alpha', & y = x''\sin\alpha' + y''\cos\alpha', \\ (a - \mathrm{B}\cos\alpha')^2 + \mathrm{B}^2\sin^2\alpha' = \mathrm{M}^2, & \mathrm{M}\sin\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha' = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de $x', x'', y', y'', \alpha, \alpha', a$ entre les équations (5), (6) s'effectue sans difficulté; on trouve

$$x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{M}\,xy\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\mathrm{B}^2(x^2+y^2) - \mathrm{M}^2x^2}}$$
$$- \sqrt{\mathrm{B}^2(x^2+y^2) - \mathrm{M}^2x^2} = \mathrm{M}y.$$

Cette courbe ne présente pas de grandes particularités; mais si l'on fait

$$\mathrm{M} = \mathrm{B},$$

cas qui correspond au système, bien connu, de Lahire, on trouve

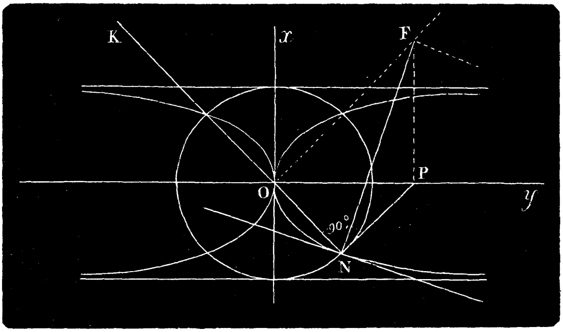
$$x^2(x^2+y^2) = M^2y^2,$$

et passant aux coordonnées polaires,

$$r = M \tan \theta.$$

La figure représente cette courbe. On démontrera sans difficulté qu'elle a deux asymptotes parallèles, et à une distance de l'origine égale à M; l'aire comprise entre la courbe et les deux asymptotes est égale au cercle de rayon M.

La longueur PN est constante et égale à M; cette der-



nière propriété permet de tracer la courbe, par un mouvement continu, au moyen du papier transparent, car le côté KN de l'angle KNP passe constamment par un point fixe O, et le point P, de l'autre côté de cet angle, parcourt la ligne Oy : ce mouvement est l'*inverse* de celui qu'on emploie pour le tracé de la *conchoïde*. La courbe en question est un cas particulier de la courbe de séparation d'ombre et de lumière, dans l'épure de la vis à filets triangulaires.

La tangente et le rayon de courbure au point N ont été tracés par les méthodes de MM. Chasles et Bresse.