NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 385-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__385_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 614;

PAR M. LÉON DYRION,
Elève de la classe de Mathématiques spéciales du lycée de Strasbourg.

Je vois dans le tome I, 2e série, p. 126, question 614, cet énoncé de M. Mannheim :

Désignons par F *le foyer d'une ellipse donnée; en un point* M *de cette courbe menons la tangente* MT *qui coupe le petit axe en* T *et projetons le point* T *sur le rayon vecteur, en* Q. *On demande le lieu du point* Q *quand le point* M *décrit l'ellipse.*

Ce lieu est un cercle, non-seulement quand on considère le point T d'intersection de la tangente avec le petit axe, mais encore pour *une droite quelconque perpendiculaire au grand axe.*

Car, soit T un point quelconque; menons par T une droite THN tangente à l'ellipse au point H et rencontrant en N la directrice DD' correspondante au foyer F. D'après une proposition connue, l'angle NFH est droit, et si TP représente la perpendiculaire abaissée du point T sur la direction du rayon vecteur FH, la similitude des triangles rectangles NFH, TPH donne

$$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HP}} = \frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{HT}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FH}} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{NH}}.$$

Abaissons maintenant sur la directrice DD′ les perpendiculaires TT′, HH′. Les triangles rectangles NHH′, NTT′ étant semblables, nous aurons

$$\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{NH}} = \frac{\mathrm{TT'}}{\mathrm{HH'}}.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FH}} = \frac{\mathrm{TT'}}{\mathrm{HH'}},$$

et par conséquent

$$\mathrm{FP} = \mathrm{TT'} \times \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HH'}} = \mathrm{TT'} \times \frac{c}{a}.$$

Si donc TT′ est constant, la distance FP sera invariable; c'est-à-dire que si le point T décrit une perpendiculaire au grand axe de l'ellipse, la projection de T sur le rayon vecteur FH décrira une circonférence ayant pour centre le foyer F.

Dans le cas particulier où la droite décrite par le point T est le petit axe de l'ellipse, on a

$$\mathrm{TT'} = \frac{a^2}{c}$$

et

$$\mathrm{FP} = \frac{a^2}{c} \times \frac{c}{a} = a.$$

Question 690;

Par M. Michel LHOPITAL,
Élève du lycee de Lyon.

Énoncé. — *Soient α, β, γ les angles qu'une droite* L *fait avec ses projections sur trois plans rectangulaires; Δ la distance de l'origine à la droite; a, b, c les distances de cette même origine aux projections de la* *droite* L *sur les trois plans coordonnés; on aura*

$$\Delta^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma.$$

(Lobatto.)

Solution. — Soient

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

les équations de la droite L; on aura, d'après une formule connue,

$$\Delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + (mq - np)^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Les projections de la droite sur les trois plans coordonnés ayant respectivement pour équations

$$x = mz + p, \quad y = nz + q, \quad my - nx + np - mq = 0,$$

on a

$$a^2 = \frac{p^2}{m^2 + 1}, \quad b^2 = \frac{q^2}{n^2 + 1}, \quad c^2 = \frac{(np - mq)^2}{m^2 + n^2}.$$

D'ailleurs,

$$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

$$\sin\beta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}};$$

d'où

$$\cos^2\alpha = \frac{m^2 + 1}{m^2 + n^2 + 1},$$

$$\cos^2\beta = \frac{n^2 + 1}{m^2 + n^2 + 1},$$

$$\cos^2\gamma = \frac{m^2 + n^2}{m^3 + n^2 + 1}.$$

Faisant la somme $a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$, il vient

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma = \frac{p^2+q^2+(np-mq)^2}{m^2+n^2+1} = \Delta^2.$$

C. Q. F. D (*).

Note. — La même question a été résolue, au moyen de calculs à peu près semblables, par MM. Antony Lucotte, élève de l'institution Sainte-Barbe à Lyon; Léon Dyrion, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg; Smet-Jamar, élève du lycée Louis-le-Grand; Travelet, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Besançon; A. Leclère et Ch. Daguenet; de Virieu, et par un Abonné.

Question 702;

PAR M. DE MEYER,
Élève du lycee Charlemagne.

ÉNONCÉ. — *Soient* O *un cercle fixe,* O′ *un cercle mobile dont le centre se meut sur un autre cercle fixe* O″ *: l'axe radical des deux premiers a pour enveloppe une conique.* (DURRANDE).

Solution. — Je prends pour origine le centre du cercle O″, pour axe des x la droite passant par les centres des cercles O, O″, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite.

En nommant R, r, ρ les rayons des cercles O″, O, O′; d la distance des centres O″, O; α, β les coordonnées du

(*) La proposition énoncée est une conséquence immédiate de ce principe connu : *Le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires.* Car, projetez sur les plans coordonnés un triangle ayant un sommet à l'origine et pour base une partie quelconque, $2.l$, de la droite L. L'aire du triangle projeté sera $l.\Delta$, et ses projections auront pour valeurs $l.a\cos\alpha$, $l.b\cos\beta$, $l.c\cos\gamma$; donc

$$\Delta^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma. \qquad \text{G.}$$

centre O′ ; les équations des cercles O″, O, O′ seront

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \qquad (x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \rho^2 = 0;$$

et de plus on aura

$$(4) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

L'axe radical des cercles (2) et (3) a pour équation, en remplaçant $\alpha^2 + \beta^2$ par R^2,

$$(5) \qquad 2(\alpha - d)x + 2\beta y + d^2 + \rho^2 - r^2 - R^2 = 0.$$

La dérivée de cette dernière équation, prise par rapport à α, en considérant β comme une fonction de α définie par la relation (4), est

$$2x - 2\frac{\alpha}{\beta}y = 0,$$

ou

$$(6) \qquad \beta x - \alpha y = 0.$$

L'équation de l'enveloppe cherchée s'obtiendra en éliminant α, β entre les équations (4), (5), (6).

Pour faire cette élimination, remplaçons dans (4) et (5) β par sa valeur tirée de (6), et afin de simplifier l'écriture, posons

$$d^2 + \rho^2 - r^2 - R^2 = 2h^2;$$

l'équation (5) donne

$$\alpha\left(x + \frac{y^2}{x}\right) - dx + h^2 = 0,$$

et l'équation (4)

$$\alpha^2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = R^2.$$

D'où les deux équations

$$\alpha\,(x^2 + y^2) = x\,(dx - k^2),$$
$$\alpha^2(x^2 + y^2) = x^2\,\mathrm{R}^2\,;$$

éliminant entre elles la variable α, il vient

$$(7)\qquad \mathrm{R}^2\,(x^2 + y^2) = (dx + k^2)^2.$$

L'enveloppe cherchée est donc une conique (*).

L'équation (7) représente une ellipse ou une hyperbole suivant que le centre de la circonférence O est intérieur ou extérieur au cercle O''; et elle appartient à une parabole, quand le point O est situé sur la circonférence O''.

Note. — Une solution à peu près semblable nous a été adressée par MM Tromparent, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet); Lacauchie, élève du lycée de Strasbourg; Marcille, élève de la pension Marlié; Mirza-Nizam (lycée Saint-Louis); P.-G. de Saint-Michel, élève de M. Beynac; Marmier, elève de l'institution Sainte-Geneviève (classe du R. P. Billot); Debaune, élève de l'institution Sainte-Barbe; Moulin (la Flèche); C. Massing (institution Sainte-Barbe); Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans.

M. Laisant détermine d'abord le lieu des projections du centre O'' sur les axes radicaux des cercles O, O'. Un calcul assez simple montre que ce lieu est une circonférence ayant pour centre un point sitné sur la droite O''O. Et de là M. Laisant conclut que l'axe radical des cercles O, O' enveloppe une conique dont O'' est un foyer et dont l'axe focal est O''O.

M. Doucet fait observer que, quelle que soit la courbe dccrite par le centre du cercle O', la normale à cette courbe en chaque position du centre mobile rencontre l'axe radical correspondant, au point où celui-ci touche l'enveloppe. Au moyen de cette remarque, M. Doucet résout la question proposée, sans recourir à la théorie des enveloppes.

La même remarque se trouve dans une solution géométrique donnée par M. Chabord, élève de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

(*) Cette conique a un foyer au point O''; la directrice correspondante est représentée par $x = -\dfrac{k^2}{d}$, et l'excentricité a pour valeur $\dfrac{d}{\mathrm{R}}$.

Question 689

(voir p. 61);

PAR MM. GODART ET COURTIN,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Étant donnés deux cercles concentriques et deux rayons quelconques, on propose de mener au cercle intérieur une tangente dont la portion comprise entre les deux rayons soit divisée en deux parties égales par le cercle extérieur.

Ce problème revient au suivant, qui est bien connu : *Construire un triangle, connaissant un angle, la médiane et la hauteur comprise dans cet angle* (*).

Nous en rappellerons la solution.

Soit OAA′ le triangle cherché, OM la médiane, OH la hauteur. Dans le parallélogramme OAA′A″ construit sur OA et OA′, nous connaissons les angles, une diagonale et l'inclinaison des diagonales tirée du triangle HOM. Le parallélogramme, et par suite le triangle, est donc facile à construire.

Note. — Autres solutions de MM. Blanchin et Barrère, élèves du lycée de Lyon; Barrandon et Picquet, de Sainte-Barbe; Périer, de Lons-le-Saulnier; G. Elie, du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Question 704

(voir p. 176);

PAR M. A. SMET-JAMAR,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

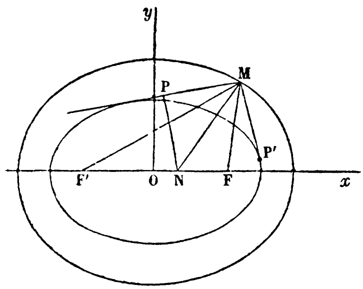
Soient C *et* C′ *deux coniques homofocales,* M *un point pris sur la première,* MN *la normale menée au*

(*) Problème proposé aux élèves de logique (sciences) au concours général en 1855. (MIRZA-NIZAM.)

point M *et terminée à l'axe focal. La grandeur de la projection de* MN *sur la tangente à* C' *menée par* M *est indépendante de la position du point* M *sur la conique.*

(Gros.)

Il faut démontrer que MP, c'est-à-dire MN cos $\overline{\text{PMN}}$,



est indépendant de la position du point M sur la conique. Soient F et F' les foyers communs aux deux coniques, a et b les axes de la conique C ; a', b' ceux de C'. Désignons par ρ et ρ' les deux rayons MF, MF' et par θ l'angle PMP', nous aurons (Salmon's *Conic Sections*, 4ᵉ édition, p. 198):

$$\cos\theta = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4a'^2}{2\rho\rho'}.$$

Pour le point M, dont les coordonnées sont x', y', on aura

$$\rho = a - \frac{cx'}{a}, \quad \rho' = a + \frac{cx'}{a}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème connu, l'angle NMP $= \frac{\theta}{2}$.
Donc

$$\overline{\text{MP}}^2 = \overline{\text{MN}}^2 \cos^2\frac{\theta}{2};$$

or

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{(\rho+\rho')^2 - 4a'^2}{4\rho\rho'} = \frac{(a^2 - a'^2)\,a^2}{a^4 - c^2x'^2};$$

mais on a facilement

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4};$$

donc

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{a^2 - a'^2}{a^2}, \quad \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4 - c^2 x'^2}.$$

Remplaçons $a^2 y'^2$ par sa valeur $b^2(a^2 - x'^2)$ et il viendra

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a'^2),$$

quantité indépendante de la position du point M sur la conique. C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions de MM. A. L., élève de l'école Sainte-Geneviève, Lacauchie, de Saint-Prix.

Question 562 (*seconde solution*)

(voir tome XX, page 59);

PAR M. A. S.

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle pour points conjugués.

(FAURE.)

Je prends l'ellipse, par exemple : pour l'hyperbole le calcul est identique. L'ellipse étant rapportée à ses axes, les équations de trois tangentes sont

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$
$$x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2 = 0.$$

On sait que

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$
$$p_1^2 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\sin^2\alpha_1,$$
$$p_2^2 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\sin^2\alpha_2.$$

L'équation du cercle conjugué au triangle est

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 + \lambda_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)^2\\&\qquad + \lambda_2(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$(1)\quad \lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2 = \lambda\sin^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha_1 + \lambda_2\sin^2\alpha_2.$$

Je ne me servirai qu'implicitement de la seconde relation (*).

La longueur de la tangente menée du centre de l'ellipse est donnée par la relation

$$l^2 = \frac{\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2}{\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2}.$$

Or

$$\begin{aligned}&\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2\\ &= \lambda(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha) + \lambda_1(a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\sin^2\alpha_1)\\ &\qquad + \lambda_2(a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\sin^2\alpha_2)\\ &= a^2(\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2)\\ &\qquad + b^2(\lambda\sin^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha_1 + \lambda_2\sin^2\alpha_2),\end{aligned}$$

et à cause de la relation (1),

$$\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 = (a^2 + b^2)(\lambda\cos^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha_1 + \lambda_2\cos^2\alpha_2).$$

(*) En y ayant égard, l'équation (1) prend la forme

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + \mu x + \nu y + (a^2 + b^2) = 0,$$

et la proposition est démontrée. L'equation (2), où μ et ν représentent des paramètres arbitraires, est l'équation générale des cercles qui coupent sous un angle droit le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. G.

Donc enfin

$$l^2 = a^2 + b^2.$$

C'est ce que je me proposais de démontrer.

Question 694

(voir page 140);

PAR M. A. SMET-JAMAR,
Élève du lycee Louis-le-Grand.

ÉNONCÉ. — *Soient n quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; *si l'on pose*

$$\sum \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \sum \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots,$$

et ainsi de suite, soient

$$f(x) = x^n + x^{n-1}\sum \alpha_1 + x^{n-2}\sum \alpha_1\alpha_2 + \ldots,$$

et $f'(x)$ *la dérivée de* $f(x)$: *démontrer que la valeur algébrique du déterminant*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1 \ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1 \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & -1 \ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

est $f(1) - f'(1)$. (MICHAEL ROBERTS.)

Solution. — Formons d'abord la quantité $f(1) - f'(1)$. Elle sera évidemment égale à

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n - \sum \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{a-2} - 2\sum \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-3} - \ldots$$
$$- (n-2)\sum \alpha_1 - (n-1).$$

Cela posé, désignons par P le déterminant proposé; nous pourrons le décomposer en une somme de déterminants dans lesquels les éléments principaux seront nuls, chacun de ces déterminants successifs étant du $n^{\text{ième}}$, du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, et ainsi de suite (*voir* Brioschi, *Théorie des déterminants*, traduction Combescure, p. 66).

Nous aurons ainsi

$$P = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & 0 & -1\ldots & -1 \\ -1 & -1 & 0\ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1\ldots & 0 \end{vmatrix} + \sum \alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & -1\ldots & -1 \\ -1 & 0\ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \sum \alpha_1 \alpha_2 \begin{vmatrix} 0 & -1\ldots & -1 \\ -1 & 0\ \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Maintenant il est évident que ces déterminants successifs ont pour valeurs

$$-(n-1), \quad -(n-2), \quad -(n-3), \ldots -1;$$

de sorte que l'égalité précédente devient

$$P = -(n-1) - \sum \alpha_1 (n-2) - \sum \alpha_1 \alpha_2 (n-3) \ldots$$
$$- \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

c'est-à-dire précisément $f(1) - f'(1)$. C. Q. F. D.

Même question;

PAR MM. MAX CORNU ET H. PICQUET,
Élèves en Mathématiques spéciales à l'institution Sainte-Barbe
(classe de M. Moutard).

$f(x)=0$ est l'équation qui a pour racines $-\alpha_1$, $-\alpha_2,\ldots, -\alpha_n$, et on peut l'écrire

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n)=0;$$

d'ailleurs

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha_1}{x+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{x+\alpha_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x+\alpha_n}.$$

Il faut faire voir que le déterminant a pour valeur algébrique

$$f(1)-f'(1) \quad \text{ou} \quad f(1)\left[1-\frac{f'(1)}{f(1)}\right]$$

ou

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$
$$\times\left[1-\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}-\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}-\ldots-\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\right].$$

Écrivons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & -1\ldots & -1 \\ -1 & -1 & \alpha_3 & -1\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & -1\ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

et retranchons la dernière colonne de toutes les autres; il vient

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1+\alpha_2 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_3 & 0\ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(1+\alpha_n) & -(1+\alpha_n) & -(1+\alpha_n)\ldots & & \alpha_n \end{vmatrix}$$

qu'on peut écrire

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_{n-1})$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & -1 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -\dfrac{1+\alpha_n}{1+\alpha_1} & -\dfrac{1+\alpha_n}{1+\alpha_2}\ldots & & & \alpha_n+1-1 \end{vmatrix}$$

ou, en divisant la dernière rangée par $1+\alpha_n$,

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & -1 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -\dfrac{1}{1+\alpha_1} & -\dfrac{1}{1+\alpha_2}\ldots & & & 1-\dfrac{1}{1+\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Ajoutons successivement chacune des colonnes à la dernière, nous aurons

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -\dfrac{1}{1+\alpha_1} & -\dfrac{1}{1+\alpha_2} & -\dfrac{1}{1+\alpha_3}\ldots & & 1-\dfrac{1}{1+\alpha_1}-\dfrac{1}{1+\alpha_2}-\ldots-\dfrac{1}{1+\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Enfin, si l'on développe en ordonnant par rapport aux termes de la dernière colonne, on a tout de suite

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$$
$$\times\left[1-\frac{1}{1+\alpha_1}-\frac{1}{1+\alpha_2}-\ldots-\frac{1}{1+\alpha_n}\right].$$

C. Q. F. D.

Note. — Des solutions peu différentes ont été données par MM. J. Courtin et C. Godart, élèves de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Moutard), et par M. A. Rezzonico.

Question 695

(voir p. 140);

PAR M. JAUFROID,
Professeur de Mathématiques au lycée de Vendôme.

ÉNONCÉ. — *Si on a*

$$(1)\qquad a_1^2-a_0a_2<0,$$
$$(2)\qquad a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3>0,$$

les racines de l'équation

$$(3)\qquad a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0,$$

sont toutes imaginaires, et, sous les mêmes conditions, l'équation

$$(4)\quad a_0x^5+5a_1x^4+10a_2x^3+10a_3x^2+5a_4x+a_5=0$$

n'a qu'une racine réelle.

Solution. — Comme on peut supposer $a_0>0$, la condition (1) donne

$$a_2>0.$$

Le premier membre de (2) étant ordonné par rapport à a_3, il faut que les racines du trinôme ainsi obtenu et égalé à zéro soient réelles, ce qui conduit à

$$(a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_0 a_4) > 0;$$

donc

$$(5) \qquad a_2^2 - a_0 a_4 < 0.$$

Cela posé, multipliant tous les termes de l'équation (3) par a_0, on peut regarder $a_0^2 x^4 + 4a_0 a_1 x^3$ comme les deux premiers termes du carré de $a_0 x^2 + 2a_2 x + a_2$.

Ajoutant et retranchant les termes qui manquent pour avoir ce carré, l'équation se met sous la forme

$$(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^2 + 4(a_2 a_0 - a_1^2) x^2 + 4(a_0 a_3 - a_1 a_2) x + a_0 a_4 - a_2^2 = 0.$$

En vertu de (1) le premier carré ne peut devenir nul pour aucune valeur réelle de x; pour le trinôme du second degré qui le suit, son premier terme et son dernier terme sont positifs, et de plus on a

$$(6) \qquad (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - (a_2 a_0 - a_1^2)(a_0 a_4 - a_2^2) < 0,$$

car cette inégalité développée se réduit à l'inégalité (2) (*). Ce trinôme restera donc continuellement positif pour toute valeur réelle de x; il suit de là que le premier membre de l'équation proposée reste aussi toujours positif pour les mêmes valeurs de x, et, par suite, que les racines de cette équation sont imaginaires.

Le premier membre de l'équation (3) étant, au facteur positif 5 près, la dérivée du premier membre de l'équation (4), il résulte de ce qui précède que ce dernier va en augmentant quand x varie de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, et

(*) Cette réduction de l'inégalité (6) à l'inégalité (2) montre qu'il n'était pas necessaire d'établir d'abord l'inégalité (5); en supprimant ce qui en a été dit, on simplifie d'autant la démonstration de la proposition énoncée. G.

comme alors il passe du négatif au positif, il ne s'annule qu'une seule fois, c'est-à-dire que l'équation (4) n'a qu'une racine réelle.

Question 387

(voir tome XVI, page 183);

PAR LE DOCTEUR JOSEPH MARTELLI.

D'après la méthode de Lagrange, on résout l'équation générale du quatrième degré en prenant une résolvante dont la racine soit une fonction linéaire des racines de l'équation proposée ayant six valeurs égales deux à deux et de signes contraires.

Soit

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4;$$

cette fonction, qui a six valeurs, dépendra d'une équation du sixième degré; mais puisque ces valeurs de y sont égales deux à deux et de signes contraires, l'équation en y s'abaissera au troisième degré en posant

$$y^2 = \theta.$$

Étant connue la composition des racines de l'équation en y, on peut la former directement, et on obtient

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta^3 - \frac{48}{a^2}(b^2 - ac)\theta^2 + \frac{64}{a^4}(12b^4 - 24ab^2c + 9a^2c^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 4a^2bd - a^3e)\theta \\ &- \frac{1024}{a^6}(2b^3 - 3abc + a^2d)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant de cette équation le second terme d'après la méthode ordinaire, c'est-à-dire en posant

$$\theta = \omega + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

on a

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega^3 - \frac{64}{a^2}(ac - 4bd + 3c^2)\,\omega \\ &+ \frac{1024}{a^3}(ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3) = 0; \end{aligned}\right.$$

et puisque

$$ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3 = 0,$$

la précédente équation (b) se réduit à la suivante

$$\omega^3 - \frac{64}{a^2}(ac - 4bd + 3c^2)\,\omega = 0,$$

dont les racines sont

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = \frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2},\quad \omega_3 = -\frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2}.$$

On obtient donc, en indiquant par θ_1, θ_2, θ_3 les racines de l'équation (a),

$$\theta_1 = \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

$$\theta_2 = \frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2} + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

$$\theta_3 = -\frac{8}{a}\sqrt{ae - 4bd + 3c^2} + \frac{16(b^2 - ac)}{a^2},$$

et aussi

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{\theta_1},$$

$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \sqrt{\theta_2},$$

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = \sqrt{\theta_3},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4b}{a}.$$

Ces dernières équations donnent les valeurs suivantes des racines de l'équation proposée :

$$x_1 = \frac{-4b + a(\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_2 = \frac{-4b + a(\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_3 = \frac{-4b + a(-\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

$$x_4 = \frac{-4b + a(-\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3})}{4a},$$

lesquelles, par les précédentes valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, évidemment ne contiennent pas de radical cubique.

Note. — Il est très-facile de remarquer la coïncidence des valeurs trouvées avec les valeurs données sans démonstration par M. Eisenstein dans le tome XXVII du *Journal de Crelle*.