Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 379-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__379_0>

CORRESPONDANCE.

Un professeur nous communique une solution de la question proposée, cette année, au concours des Lycées de Paris, pour les classes de mathématiques spéciales.

Cette solution offre une application remarquable de la méthode qui consiste à exprimer chacune des deux coordonnées variables d'un point en fonction d'une nouvelle variable indépendante. Pour mettre en évidence l'utilité de cette méthode, la question proposée a été on ne peut mieux choisie.

En voici d'abord l'énoncé :

Une parabole étant donnée, on mène par le pied de sa directrice une sécante rectiligne quelconque, et par les deux points d'intersection on fait passer une parabole égale à la première et dont l'axe soit perpendiculaire à celui de la parabole donnée : trouver le lieu géométrique du sommet de la parabole mobile.

En prenant pour axes de coordonnées la directrice et l'axe de la parabole fixe, et nommant $2p$ le paramètre; α, β les coordonnées du sommet de la parabole mobile; m le coefficient angulaire de la sécante : les coordonnées x, y des points communs à ces trois lignes seront liées entre elles par les relations

(1) $$y^2 - 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0,$$

(2) $$(x-\alpha)^2 - 2p(\beta - y) = 0\ (^*),$$

(3) $$y = mx.$$

(*) Par les deux points d'intersection de la sécante et de la parabole donnee, on peut faire passer deux paraboles satisfaisant aux conditions de

Éliminant y, il vient :

$$(4)\qquad m^2x^2 - 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0,$$

$$(5)\qquad (x-\alpha)^2 - 2p(\beta - mx) = 0.$$

Les équations (4) et (5) devant admettre les mêmes racines ont nécessairement leurs coefficients proportionnels, donc

$$\frac{m^2}{1} = \frac{p}{\alpha - pm} = \frac{p^2}{\alpha^2 - 2p\beta}.$$

C'est au moyen de ces dernières relations, qui donnent facilement les valeurs des coordonnées α, β, en fonction de la variable indépendante m, que notre correspondant détermine la forme du lieu cherché, par la séparation de ses différentes branches qui ont pour asymptotes les paraboles

$$\alpha^2 - 2p\beta = 0, \quad \alpha^2 - 2p\beta - \alpha p = 0,$$

et en faisant connaître toutes les particularités que présente chacune de ces branches.

La même solution est aussi déduite de l'équation du lieu, qu'on obtient en éliminant l'indéterminée m entre les relations (4) et (5). Cette équation est

$$(6)\qquad (\alpha^2 - 2p\beta)(\alpha^2 - 2p\beta - p\alpha)^2 = p^6.$$

On y satisfait en posant

$$(7)\qquad \alpha^2 - 2p\beta = \lambda p^2,$$

$$(8)\qquad \alpha^2 - 2p\beta - p\alpha = \frac{p^2}{\sqrt{\lambda}},$$

quelle que soit la valeur attribuée à λ.

---

l'énoncé. L'équation

$$(x-\alpha)^2 - 2p(\beta - y) = 0$$

se rapporte à l'une de ces deux courbes; pour l'autre, il faudrait écrire

$$(x-\alpha)^2 + 2p(\beta - y) = 0.$$

D'où

$$(9) \qquad \alpha = p\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$(10) \qquad \beta = \frac{p}{2}\left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 - \lambda\right].$$

Les équations (7) et (8) montrent que les paraboles

$$\alpha^2 - 2p\beta = 0, \quad \alpha^2 - 2p\beta - p\alpha = 0,$$

sont asymptotes à la courbe, et les valeurs (9), (10) de α, β, déterminent ses différents points.

RÉPONSE A UN ABONNÉ,

AU SUJET DE CETTE PROPOSITION QUE :

Si, dans le premier membre de l'équation $f(x, y) = 0$ d'une conique, on remplace les coordonnées courantes x, y, par les coordonnées α, β d'un point non situé sur la courbe, le résultat $f(\alpha, \beta)$ de la substitution et le discriminant Δ de l'équation proposée auront le même signe, ou des signes contraires, suivant que le point (α, β) sera intérieur ou extérieur à la courbe.

En représentant la conique par l'équation

$$(1) \qquad ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2b'x + 2by + a'' = 0,$$

le discriminant est

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, les coordonnées α, β du centre ont les valeurs finies

$$\frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'}, \quad \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}.$$

La substitution de ces valeurs dans le premier membre de l'équation (1) donne

$$\frac{(a'b' - bb'')b' + (ab - b'b'')b}{b''^2 - aa'} + a'',$$

ou

$$\frac{ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''}{b''^2 - aa'}.$$

On a donc

$$(2) \qquad f(\alpha, \beta) = \frac{\Delta}{aa' - b''^2}.$$

Quand la conique est une ellipse, le centre est un point intérieur, et, de plus, la différence $aa' - b''^2$ est positive. La relation (2) montre que $f(\alpha, \beta)$ et Δ ont, alors, le même signe, ce qui aura lieu, aussi, pour tout autre point intérieur, puisque $f(\alpha, \beta)$ ne changera pas de signe.

Si l'équation (1) représente une hyperbole, on aura

$$aa' - b''^2 < 0,$$

et par suite

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{\Delta} < 0;$$

mais, dans ce cas, le centre est un point extérieur; donc, la proposition est démontrée pour l'ellipse et l'hyperbole.

Lorsque l'équation (1) appartient à une parabole, on a

$$aa' - b''^2 = 0,$$

et les coefficients a, a' ont nécessairement le même signe; on peut les supposer tous deux positifs.

Le discriminant se réduit à

$$2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2.$$

Et, parce que

$$b'' = \pm\sqrt{aa'},$$

on a

$$(3) \qquad \Delta = -(b\sqrt{a} \pm b'\sqrt{a'})^2$$

D'autre part, l'équation (1) prend la forme

$$(4) \qquad (x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a'})^2 + 2b'x + 2b''y + a'' = 0.$$

La droite représentée par

$$2b'x + 2b''y + a'' = 0$$

touche la parabole au point de rencontre de cette courbe et du diamètre

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a'} = 0.$$

Tout autre point de la tangente est extérieur à la courbe; la substitution de ses coordonnées, α, β, à x, y, donne

$$(5) \qquad f(\alpha, \beta) = (\alpha\sqrt{a} \pm \beta\sqrt{a'})^2;$$

donc $f(\alpha, \beta)$ et Δ ont des signes contraires. Et, par conséquent, la proposition énoncée convient aussi à la parabole. G.