NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 367-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__367_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 663 (*seconde solution*)

(voir 2e série, t. II, p. 336);

PAR M. A. S., ABONNÉ.

Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans *un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre.*

(E. Beltrami.)

Je prends le tétraèdre pour tétraèdre de référence et je suppose les paramètres de référence égaux à l'unité. Je désigne par A, B, C, D, V les aires des faces du tétraèdre et son volume, et je rappelle que les coordonnées x, y, z, t d'un point vérifient la relation

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V.$$

Cela posé, la surface dont l'équation est

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0$$

satisfait à toutes les conditions de l'énoncé.

Il est évident d'abord qu'elle passe par les arêtes du tétraèdre; de plus, les sommets du tétraèdre sont des points doubles de la surface. En effet, je cherche l'intersection avec une droite passant par le sommet A ($y = \beta t$, $z = \gamma t$); je trouve

$$A\beta\gamma t^3 + B\gamma x t^2 + C\beta x t^2 + D\beta\gamma x t^2 = 0;$$

le premier membre est divisible par t^2, donc le point est un point double. Cette droite sera tangente si l'on pose

$$B\gamma + C\beta + D\beta\gamma = 0.$$

Donc le cône des tangentes au sommet A a pour équation

$$\frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0.$$

Il en est de même pour les autres sommets.

Je dis de plus que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des sphères inscrites sont sur cette surface. Ces centres sont à l'intersection des plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre. Les coordonnées du centre vérifient donc les relations

$$x_1 = y_1 = z_1 = t_1, \qquad x_2 = y_2 = z_2 = -t_2$$
$$x_3 = y_3 = -z_3 = t_3, \qquad x_4 = y_4 = -z_4 = -t_4,$$
$$x_5 = -y_5 = z_5 = t_5, \qquad x_6 = -y_6 = z_6 = -t_6,$$
$$x_7 = -y_7 = -z_7 = t_7, \qquad x_8 = -y_8 = -z_8 = -t_8,$$

et la relation générale

$$Ax + By + Cz + Dt = 3V.$$

Les coordonnées du point milieu de la droite 1,2 par exemple sont

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

Or,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 3V,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Dt_2 = 3V;$$

les coordonnées du point milieu sont donc de la forme

$$x' = y' = z' = k(A + B + C), \quad t' = -kD.$$

Ces coordonnées vérifient évidemment l'équation de la surface, car on a identiquement

$$\frac{A}{A+B+C} + \frac{B}{A+B+C} + \frac{C}{A+B+C} - \frac{D}{D} = 0.$$

Les coordonnées des points milieux auront d'autres formes que celles que nous venons de voir, mais elles se ramènent aux formes dont les types sont par exemple :

$$[x = y = k(A + B), \quad z = t = -k(C + D)],$$
$$[x = y = z = k(A + B + C), \quad t = -kD];$$
$$[x = y = k(A + B), \quad z = -t = -k(C - D)],$$
$$[y = z = -t = +k(B + C - D), \quad x = -kA];$$
$$[x = -t = k(A - D), \quad -z = y = -k(B - C)],$$

où x, y, z, t sont les coordonnées d'un point milieu et k une constante arbitraire. Il est facile de voir que ces coordonnées vérifient l'équation de la surface indiquée

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0.$$

Je remarque que cette équation est tout à fait semblable à celle du cercle circonscrit à un triangle. La surface qu'elle représente jouit d'une propriété analogue à celle du cercle, qui est la suivante :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la surface sur les faces du tétraèdre sont dans un même plan.

En effet, on a la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A^2}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{zy} & \cos\widehat{ty} \\ \cos\widehat{zy} & 1 & \cos\widehat{zt} \\ \cos\widehat{ty} & \cos\widehat{zt} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{B^2}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{xz} & \cos\widehat{xt} \\ \cos\widehat{xz} & 1 & \cos\widehat{zt} \\ \cos\widehat{xt} & \cos\widehat{zt} & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{C^2}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{xy} & \cos\widehat{xt} \\ \cos\widehat{yx} & 1 & \cos\widehat{yt} \\ \cos\widehat{tx} & \cos\widehat{ty} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{D^2}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{xy} & \cos\widehat{xz} \\ \cos\widehat{xy} & 1 & \cos\widehat{yz} \\ \cos\widehat{zx} & \cos\widehat{zy} & 1 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right.$$

L'équation de la surface est

$$Ayzt + Bxzt + Cxyt + Dxyz = 0.$$

Je remplace A, B, C, D par les quantités proportionnelles indiquées par la relation (1). Or

$$yzt \begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{yz} & \cos\widehat{yt} \\ \cos\widehat{zy} & 1 & \cos\widehat{zt} \\ \cos\widehat{ty} & \cos\widehat{tz} & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

égale six fois le volume du tétraèdre formé avec les perpendiculaires aux faces $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$. Les autres termes ont une signification analogue. Donc :

La somme algébrique des volumes des tétraèdres obtenus en prenant trois à trois les perpendiculaires aux faces du tétraèdre menées d'un point de la surface est nulle; donc enfin les pieds de ces quatre perpendiculaires sont dans un même plan.

Question 681

(voir page 72);

PAR M. DE SAINT-PRIX.

La seconde égalité de la question 681 n'est démontrée par M. de Virieu que dans le cas particulier où les angles a, b, c sont liés entre eux par la relation

$$a + b + c = (2k + 1)\pi.$$

Je me propose, dans ce qui va suivre, de traiter la question d'une manière générale.

Dans la démonstration que j'avais voulu en donner, et qu'une erreur de calcul rendait illusoire, j'étais arrivé à la relation

$$\frac{\cos a}{\sin c \cos b} - \frac{\cos a}{\sin b \cos c} + \frac{\cos b}{\sin a \cos c} - \frac{\cos b}{\sin c \cos a} + \frac{\cos c}{\sin b \cos a} - \frac{\cos c}{\sin a \cos b} = 0.$$

On peut l'écrire

$$\cos a \sin 2a \sin(b - c) + \cos b \sin 2b \sin(c - a) + \cos c \sin 2c \sin(a - b) = 0.$$

A l'aide des formules qui changent un produit de sinus en une différence de cosinus, cette égalité peut s'écrire, après avoir chassé le dénominateur qui est numérique,

$$\left.\begin{array}{r}\cos a\,[\cos(2a-b+c)+\cos(2a+b-c)]\\+\cos b\,[\cos(2b-c+a)+\cos(2b+c-a)]\\+\cos c\,[\cos(2c-a+b)+\cos(2c+a-b)]\end{array}\right\}=0.$$

En développant, faisant les réductions et recomposant les termes deux à deux, l'égalité devient

$$\left.\begin{array}{r}\cos(a-b+3c)-\cos(a-b-3c)\\+\cos(b-c+3a)-\cos(b-c-3a)\\+\cos(c-a+3b)-\cos(c-a-3b)\end{array}\right\}=0,$$

ou, en transformant les différences de cosinus en produits de sinus,

$$\sin(a+b+c)\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(c-b)=0\ (*).$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs du produit le soit.

La condition

$$\sin(a+b+c)=0$$

donne la relation

$$a+b+c=k\pi$$

entre les angles a, b, c (k étant un nombre entier quelconque).

La condition

$$\sin(a-b)=0$$

donne la relation

$$a-b=k_1\pi,$$

$$a-b=0.$$

On retrouve ainsi que si deux arcs sont égaux, le troisième quelconque, la relation (2) est vérifiée.

Les deux autres facteurs donneraient lieu aux mêmes remarques.

(*) Cette transformation nous a aussi été indiquée par M. J. B., abonné.

Question 696 (Michael Roberts);

Par M. BOUTMY,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

M. Michaël Roberts propose de démontrer le tableau suivant relatif à la réalité des racines de l'équation

(1) $$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0:$$

(2) $p > 0$, une racine réelle, quatre imaginaires,

(3) $\left\{\begin{array}{l} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} < 0 \end{array}\right\}$ cinq racines réelles.

(4) $\left\{\begin{array}{l} p < 0 \\ p^5 + \dfrac{q^2}{4} > 0 \end{array}\right\}$ une racine réelle, quatre imaginaires.

Je remarque d'abord que le tableau peut se réduire aux deux conditions suivantes :

(5) $p^5 + \dfrac{q^2}{4} > 0$, une racine réelle, quatre imaginaires,

(6) $p^5 + \dfrac{q^2}{4} < 0$, cinq racines réelles.

En effet, si l'on a p positif, on aura nécessairement $p^5 + \dfrac{q^2}{4}$ positif, donc la condition (5) tient lieu des deux conditions (2) et (4); de même, si l'on a $p^5 + \dfrac{q^2}{4}$ négatif on aura nécessairement p négatif; donc la condition (6) suffit pour remplacer la condition (3).

Je vais résoudre l'équation proposée par une méthode analogue à celle que l'on suit pour résoudre algébriquement l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

Posons

$$x = y + z,$$

l'équation (1) deviendra

$$(y+z)^5 + 5p(y+z)^3 + 5p^2(y+z) + q = 0,$$

ou, en groupant les termes,

$$y^5 + z^5 + q + 5(yz+p)(y^3 + z^3 + 2yz^2 + 2y^2z + py + pz) = 0.$$

Si l'on établit entre y et z la relation

$$(7) \qquad yz = -p, \quad \text{on aura} \quad y^5 + z^5 = -q.$$

Je remarque que les racines de ce système sont les racines du système

$$(8) \qquad \begin{cases} y^5 + z^5 = -q, \\ y^5 z^5 = -p^5, \end{cases}$$

qui rendent le produit yz réel.

Le système (8) donne

$$y^5 = -\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}, \quad z^5 = -\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° y^5 et z^5 sont imaginaires, ce qui entraîne la condition

$$\frac{q^2}{4} + p^5 < 0;$$

2° y^5 et z^5 sont réels, ce qui entraîne la condition

$$\frac{q^2}{4} + p^5 > 0.$$

1° $\frac{q^2}{4} + p^5 < 0$ *et par suite* $p < 0$. — Dans ce cas, je dis que l'équation proposée a ses cinq racines réelles, et je vais indiquer la marche à suivre pour les calculer :

Puisque $p^5 + \frac{q^2}{4}$ est négatif, les valeurs de y^5 et de z^5 sont imaginaires et peuvent s'écrire

$$y^5 = \mathrm{R}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad z^5 = \mathrm{R}(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

en posant

$$\mathrm{R} = \sqrt[2]{-p^5}, \quad \cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt[2]{-p^5}}, \quad \sin\alpha = \sqrt[2]{\frac{\frac{q^2}{4} + p^5}{p^5}};$$

par suite nous aurons, k et k' prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, 4,

$$y = \mathrm{R}^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{5}\right),$$

$$z = \mathrm{R}^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k'\pi}{5} - i\sin\frac{\alpha + 2k'\pi}{5}\right)$$

$$= \mathrm{R}^{\frac{1}{5}}\left(\cos - \frac{\alpha + 2k'\pi}{5} + i\sin - \frac{\alpha + 2k'\pi}{5}\right),$$

d'où

$$yz = \mathrm{R}^{\frac{2}{5}}\left[\cos\frac{2(k - k')\pi}{5} + i\sin\frac{2(k - k')\pi}{5}\right].$$

k et k' étant plus petits que 5, leur différence ne pourra être un multiple de 5; donc yz ne sera réel que si k est égal à k'.

Ainsi, pour former la somme $y + z$, c'est-à-dire x, nous choisirons des valeurs de y et de z ayant même argument : cela nous donnera

$$x = 2\mathrm{R}^{\frac{1}{5}}\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{5}.$$

2° $p^5 + \frac{q^2}{4} > 0$. — Alors les valeurs de y^5 et de z^5 sont réelles; soient A et B les racines cinquièmes réelles de $-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}$ et $-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + p^5}$; soit aussi α une racine cinquième imaginaire de l'unité.

y aura les valeurs

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{A}\alpha, \quad \mathrm{A}\alpha^2, \quad \mathrm{A}\alpha^3, \quad \mathrm{A}\alpha^4,$$

et z aura les valeurs

$$\mathrm{B}, \quad \mathrm{B}\alpha, \quad \mathrm{B}\alpha^2, \quad \mathrm{B}\alpha^3, \quad \mathrm{B}\alpha^4.$$

Le tableau suivant montre les cinq couples de valeurs de y et de z qui donnent pour yz une valeur réelle et par suite une valeur convenable pour x :

$y_1 = \mathrm{A}$,	$z_1 = \mathrm{B}$,	$y_1 z_1 = \mathrm{AB}$,	$x_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$,
$y_2 = \mathrm{A}\alpha$,	$z_2 = \mathrm{B}\alpha^4$,	$y_2 z_2 = \mathrm{AB}$,	$x_2 = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\alpha^4$,
$y_3 = \mathrm{A}\alpha^2$,	$z_3 = \mathrm{B}\alpha^3$,	$y_3 z_3 = \mathrm{AB}$,	$x_3 = \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\alpha^3$,
$y_4 = \mathrm{A}\alpha^3$,	$z_4 = \mathrm{B}\alpha^2$,	$y_4 z_4 = \mathrm{AB}$,	$x_4 = \mathrm{A}\alpha^3 + \mathrm{B}\alpha^2$,
$y_5 = \mathrm{A}\alpha^4$,	$z_5 = \mathrm{B}\alpha$,	$y_5 z_5 = \mathrm{AB}$,	$x_5 = \mathrm{A}\alpha^4 + \mathrm{B}\alpha$.

On voit qu'il y a pour x une seule valeur réelle x_1 et quatre valeurs imaginaires conjuguées deux à deux.

On calculera A et B au moyen d'une tangente, ou d'un sinus auxiliaire suivant que p sera positif ou négatif, comme on le fait pour l'équation du troisième degré.

3° $\frac{q^2}{4} + p^5 = 0$. — Dans ce cas B est égal à A; si on remplace B par A dans les valeurs précédemment trouvées pour x, on voit qu'il vient :

$$x_1 = 2\mathrm{A},$$
$$x_2 = \mathrm{A}(\alpha + \alpha^4) = x_5,$$
$$x_3 = \mathrm{A}(\alpha^2 + \alpha^3) = x_4.$$

Ces cinq racines sont réelles, car α et α^4, α^2 et α^3 sont des quantités imaginaires conjuguées.

Ainsi, dans le cas où $\frac{q^2}{4} + p^5$ est nul, l'équation a cinq racines réelles, savoir :

Une racine simple $\quad x_1 = 2\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Une racine double $\quad x_2 = x_5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Une racine double $\quad x_3 = x_5 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt[5]{-\frac{q}{2}}$,

Note. — La question a été traitée à peu près de la même manière par MM. Cousin, Jaufroid et Réalis. Ce dernier remarque que l'équation de M. Roberts est un cas particulier de certaines équations résolues par Moivre, et nous envoie sur ce sujet un Mémoire que nous insérerons bientôt.

Même question ;

PAR M. ROUSSEAU,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser).

Appliquons à cette équation le théorème de Rolle ; la dérivée du premier membre égalée à zéro sera

$$x^4 + 3px^2 + p^2 = 0,$$

dont les quatre racines rangées par ordre de grandeur dans le cas de $p < 0$ sont

$$+\sqrt{-p\frac{3+\sqrt{5}}{2}},\quad +\sqrt{-p\frac{3-\sqrt{5}}{2}},$$
$$-\sqrt{-p\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\quad -\sqrt{-p\frac{3+\sqrt{5}}{2}},$$

Pour que les cinq racines de l'équation proposée soient réelles, il faut que les résultats des substitutions de $+\infty$, des quatre quantités ci-dessus, et de $-\infty$ à x dans cette équation, donnent des résultats alternativement positifs et négatifs. Or, la substitution de $\pm\sqrt{-p\,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ dans la fonction

$$x^4+5px^2+5p^2$$

donne

$$p^2(1\mp\sqrt{5});$$

et, comme l'équation proposée peut s'écrire

$$x\,(x^4+5px^2+5p^2)+q,$$

les résultats de toutes les substitutions sont compris dans la formule

$$\pm 2p^2\sqrt{-p}+q.$$

Par suite toutes les conditions de réalité seront remplies si

$$p^5+\frac{q^2}{4}<0.$$

Si $p^5+\frac{q^2}{4}>0$, les racines de la dérivée ne sépareront pas celles de la proposée, et il y aura quatre racines imaginaires.

Enfin, si $p>0$, la dérivée a toutes ses racines imaginaires, et par suite la proposée n'a qu'une racine réelle.

Note. — Solutions analogues de MM. Bailly, Leclère; Grassat et Vialay, élèves du lycée de Lyon; A. T. et E. G., élèves du collège Chaptal; du Mesnil; Massing, élève de M. Moutard; Mirza-Nizam.